

Handelbarkeit und Informationsgehalt von Volatilitätsindizes

Inauguraldissertation

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Wirtschaftswissenschaften

der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften

an der Universität Bielefeld

vorgelegt von

Dipl. Kfm. André Schöne

Bielefeld, im Dezember 2011

Dekan: Prof. Dr. Herbert Dawid

Gutachter: Prof. Dr. Thomas Braun

Zweitgutachter: Prof. Dr. Bernhard Eckwert

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Dezember 2011

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner dreijährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Finanzwirtschaft, an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Bielefeld. Es handelt sich hierbei um eine im wesentlichen unveränderte Fassung meiner Dissertation, die im Dezember 2011 von der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Bielefeld angenommen wurde.

Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen, mich bei den Personen zu bedanken, die einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit geleistet haben. Mein allererster Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Thomas Braun für die Betreuung meines Dissertationsvorhabens. Er hat mich gleich zu Beginn meiner Lehrstuhl­tätigkeit dazu ermutigt, mich intensiver mit der Thematik „Volatilitätsindizes“ zu beschäftigen und mir die Freiheiten eingeräumt, die ich zur Erstellung dieser Arbeit benötigte. Herrn Prof. Dr. Bernhard Eckwert danke ich herzlich für die Anfertigung des Zweitgutachtens, Herrn Prof. Dr. Matthias Amen für seine Teilnahme als Drittgutachter an der mündlichen Prüfung.

Bedanken möchte ich mich zudem bei meinen Kolleginnen und Kollegen in V8 für ein hervorragendes Arbeitsklima und viele anregende und hilfreiche Diskussionen. Ein besonderer Dank gilt dabei Frau Regine Längen, die mir jederzeit hilfsbereit zur Seite stand. Meinem Bruder danke ich für seine Unterstützung beim Korrekturlesen der Arbeit.

Besonders herzlich danke ich meinen Eltern für ihre immerwährende Unterstützung auf meinem bisherigen Lebensweg. Diese Arbeit ist ihnen gewidmet.

Bielefeld, im Dezember 2011

André Schöne

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Volatilitätsindizes	5
2.1	Zur Geschichte und Entwicklung von Volatilitätsindizes	5
2.2	Berechnungskonzepte von Volatilitätsindizes	7
2.2.1	Berechnungskonzept des VDAX-Index	7
2.2.2	Berechnungskonzept des VDAX-New-Index	10
3	Volatilitätsderivate	13
3.1	Vorbemerkungen	13
3.2	Arbitragefreie Bewertung und Martingalmethodik	14
3.3	Varianz-Swaps	15
3.4	Volatilitäts-Swaps	20
4	Zur Handelbarkeit der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG	30
4.1	Vorbemerkungen	30
4.2	Volatilitätsderivate als Berechnungsgrundlage der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New	32
4.2.1	Der Volatilitäts-Swap als Berechnungsgrundlage des VDAX- Index	32
4.2.2	Der Varianz-Swap als Berechnungsgrundlage des VDAX-New- Index	34
4.3	Handelbarkeit von Volatilitätsindizes	35
4.3.1	Replikation auf Spot-Basis	36
4.3.1.1	Replikation mit Volatilitäts-Swaps	37
4.3.1.2	Replikation mit Varianz-Swaps	40
4.3.2	Replikation auf Futures-Basis	42
4.3.3	Indexzertifikate auf den VDAX-New	44
4.4	Zusammenfassung	47
5	Zum Informationsgehalt der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX- New der Deutsche Börse AG	50

5.1	Vorbemerkungen	50
5.2	Der Informationsgehalt impliziter Volatilitäten	52
5.2.1	Integrierte Varianz und implizite Volatilität	52
5.2.2	Die Prognosefähigkeit impliziter Volatilitäten	56
5.3	Volatilitätsschätzer	59
5.3.1	Volatilitätsschätzer basierend auf Tagesdaten	59
5.3.1.1	Der Close-to-Close-Schätzer	59
5.3.1.2	Der PARKINSON-Schätzer	60
5.3.1.3	Der GARMAN/KLASS-Schätzer	61
5.3.1.4	Der ROGERS/SATCHELL-Schätzer	62
5.3.1.5	Der YANG/ZHANG-Schätzer	62
5.3.2	Volatilitätsschätzer basierend auf hochfrequenten Daten	64
5.3.2.1	Die realisierte Volatilität	64
5.4	Volatilitätsindizes als Prognose der zukünftigen Volatilität	66
5.4.1	JENSEN's Ungleichung und der Konvexitätsfehler	66
5.5	Daten und Deskriptive Statistik	68
5.6	Regressionsanalyse	73
5.6.1	MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung von Tagesdaten	73
5.6.2	MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung von Hochfrequenzdaten	81
5.6.3	Interpretation der Ergebnisse	84
5.7	Zusammenfassung	86
6	Eine empirische Analyse von Varianzrisikoprämien mit Hilfe nationaler Volatilitätsindizes	88
6.1	Vorbemerkungen	88
6.2	Zur Schätzung von Varianzrisikoprämien	92
6.3	Daten und Deskriptive Statistik	95
6.4	Empirische Analyse	100
6.4.1	Varianzrisikoprämien nationaler Aktienindizes	100
6.4.2	Erklärung der Varianzrisikoprämien mit Hilfe des CAPM	105
6.4.3	Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen	107

6.4.4	Varianzrisikoprämien im Zeitverlauf	109
6.4.5	Erklärung von CDS-Prämien mit Hilfe von Varianzrisikoprämien	112
6.5	Zusammenfassung	116
7	Schlussbemerkung	118
	Anhang	120
A	Beweis zu Proposition 3.1	120
	Literaturverzeichnis	121

Abbildungsverzeichnis

1	Volatilitäts-Swap-Rate im Heston-Modell mit den Parametern $\kappa = 1,15, v_\infty = 0,04, \vartheta = 0,39, v_0 = 0,04$ und $T = 0,5$	28
2	Ausmaß des Konvexitätsfehlers im Heston-Modell mit den Parametern $\kappa = 1,15, v_\infty = 0,04, v_0 = 0,04$ und $T = 0,5$	40
3	Abweichung des VDAX-New und der 30D-Volatilitäts-Swap-Rate.	41
4	VDAX-New Zertifikat und VDAX-New im direkten Vergleich.	45
5	Volatilitätssignatur der realisierten Volatilität $RV^{(m)}$	65
6	Verlauf des VDAX, VDAX-New und DAX.	69
7	Verlauf der sechs Volatilitätsindizes.	96
8	Verlauf der sechs Aktienindizes.	97
9	Verlauf der CDS-Prämien.	98

Tabellenverzeichnis

1	Deskriptive Statistik des Konvexitätsfehlers des VDAX-New	67
2	Beobachtungszeiträume für die Regressionsanalyse.	68
3	Deskriptive Statistik des VDAX-New und der Volatilitäts- schätzer unter Verwendung von Tagesdaten.	71
4	Deskriptive Statistik des VDAX und der Volatilitätsschätzer unter Verwendung von Tagesdaten.	72
5	Deskriptive Statistik des VDAX-New und VDAX und der korrespondierenden realisierten Volatilität RV unter Ver- wendung von HF-Daten.	73
6	Regressionsanalyse des VDAX-New unter Verwendung von Tagesdaten.	75
7	Hypothesentests für VDAX-New und VDAX	77
8	Hypothesentest $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ für VDAX-New und VDAX	77
9	Regressionsanalyse des VDAX unter Verwendung von Ta- gesdaten.	78
10	Regressionsanalyse des VDAX-New und VDAX bei sich nicht überlappenden (Tages-)Daten.	80
11	Hypothesentests für VDAX-New und VDAX bei sich nicht überlappenden Daten	80
12	Hypothesentest $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ für VDAX-New und VDAX bei sich nicht überlappenden Daten	80
13	Regressionsanalyse des VDAX-New und VDAX unter Ver- wendung von HF-Daten.	82
14	Hypothesentests für VDAX-New und VDAX unter Verwen- dung von HF-Ddaten	83
15	Beobachtungszeiträume.	96
16	Korrelationen zwischen den Aktien- und Volatilitätsindizes. .	97
17	Deskriptive Statistik der ex post geschätzten Varianzen . . .	100
18	Deskriptive Statistik der sechs Volatilitätsindizes	101
19	Deskriptive Statistik der CDS-Prämien.	101
20	Deskriptive Statistik der Varianzrisikoprämien $\widehat{VRP}_{t,T}$	102

21	Deskriptive Statistik der Varianzrisikoprämien $\widehat{LVRP}_{t,T}$	103
22	Erklärung der Varianzrisikoprämien mit Hilfe des CAPM.	106
23	Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen: $r_t < 0$	109
24	Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen: $r_t \geq 0$	110
25	MINCER/ZARNOWITZ-Regression auf Basis der Varianzrisikoprämien $\widehat{VRP}_{t,T}$	112
26	MINCER/ZARNOWITZ-Regression auf Basis der Varianzrisikoprämien $\widehat{LVRP}_{t,T}$	113
27	Erklärung von CDS-Prämien.	114
28	Erklärung von CDS-Prämien.	115

Abkürzungsverzeichnis

AG	Aktiengesellschaft
ATM	At the money
ATMF	At the money forward
BSM	Black/Scholes/Merton
CAPM	Capital Asset Pricing Model
ca.	circa
DAX	Deutscher Aktienindex
d.h.	das heißt
et al.	et alii (und andere)
etc.	et cetera (und die übrigen)
EUR	Euro
ff.	fortfolgende [Seiten]
HJM	Heath/Jarrow/Morton
i.e.	id est (mit anderen Worten)
i.H.v.	in Höhe von
ISDA	International Swaps and Derivatives Association
max	maximum
min	minimum
OLS	Ordinary least squares (dt.: Methode der kleinsten Quadrate)
OtC	Over-the-Counter
OTM	out the money
P&L	Profit&Loss
p.a.	per anno (pro Jahr)
S.	Seite(n)
S&P	Standard&Poors
u.a.	unter anderem; und andere
USD	United States Dollar
vgl.	Vergleiche
z.B.	zum Beispiel

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

b_0	Regressionskonstante im linearen Regressionsmodell (OLS-Schätzer)
b_j	Regressionskoeffizient der j -ten erklärenden Größe im linearen Regressionsmodell (OLS-Schätzer)
$B_{t,T}, B_t$	Preis eines Geldmarktfonds mit Fälligkeit T im Zeitpunkt t
$C(T, K)$	Auszahlung einer Plain-Vanilla Call-Option mit Basispreis K zum Fälligkeitszeitpunkt T
C_t^{BS}	Optionswert nach BLACK/SCHOLES/MERTON im Zeitpunkt t
C_t^{HW}	Optionswert nach HULL/WHITE im Zeitpunkt t
\mathcal{F}_t	σ -Algebra von Teilmengen aus dem Grundraum
$F_{t,T}$	Forward-/Futures-Kurs des Basiswertes S_t mit Fälligkeit in T im Zeitpunkt t
\mathbb{F}	Filtration; Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in [t, T]}$ von σ -Algebren
$IV_{t,T}$	integrierte Varianz des Zeitraums $[t, T]$
$K_{t,T}^{\text{var}}$	Varianz-Swap-Rate der Fälligkeit T im Zeitpunkt t
$K_{t,T}^{\text{vol}}$	Volatilitäts-Swap-Rate der Fälligkeit T im Zeitpunkt t
K^C	Basispreis einer Call-Option
K^P	Basispreis einer Put-Option
L_T	Auszahlung eines Log-Kontrakts zum Fälligkeitszeitpunkt T
$LVRP_{t,T}$	logarithmierte Varianzrisikoprämie des Zeitraums $[t, T]$
N^{var}	Nominalbetrag eines Varianz-Swaps
N^{vol}	Nominalbetrag eines Volatilitäts-Swaps
$P(T, K)$	Auszahlung einer Plain-Vanilla Put-Option mit Basispreis K zum Fälligkeitszeitpunkt T
\mathbb{P}	reales Wahrscheinlichkeitsmaß
\mathbb{Q}	äquivalentes Martingalmaß
$QV_{t,T}$	quadratische Variation des Zeitraums $[t, T]$
r_t, r_{t_i}	zeitstetige Rendite

$r_{t,T}^M$	zeitstetige Rendite des Marktportfolios über den Zeitraum $[t, T]$
r, r_f	risikoloser Zinssatz
$RV_{t,T}$	realisierte Volatilität des Zeitraums $[t, T]$
S_t	Kurs des Basiswertes im Zeitpunkt t
S^*	Referenzwert, welcher die Grenze zwischen Call- und Put-Optionen im Replikationsportfolio darstellt
t, t_i	Betrachtungszeitpunkt
$T - t, T - t_i$	Restlaufzeit in Jahren
Var_T	Zahlungscharakteristik eines Varianz-Swaps zum Fälligkeitszeitpunkt T
Vol_T	Zahlungscharakteristik eines Volatilitäts-Swaps zum Fälligkeitszeitpunkt T
$V_t(X_T)$	Wert einer Zahlungscharakteristik X_T zu einem Zeitpunkt $t < T$
$\text{Vol-Index}_{t,T}$	Kurs eines Volatilitätsindex mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t
$VRP_{t,T}$	Varianzrisikoprämie des Zeitraums $[t, T]$
$W_t^{\mathbb{P}}$	standardisierter Wiener-Prozess unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}
$W_t^{\mathbb{Q}}$	standardisierter Wiener-Prozess unter dem Martingalmaß \mathbb{Q}
v_0	Short-Volatility im HESTON-Modell
v_∞	Langzeit-Varianz im HESTON-Modell
$w^C(K)$	Stückzahl einer Call-Option im Replikationsportfolio mit dem Basispreis K
$w^P(K)$	Stückzahl einer Put-Option im Replikationsportfolio mit dem Basispreis K
$w^{ST}(K)$	Stückzahl eines Straddle im Replikationsportfolio mit dem Basispreis K
Y_t	Preis des Basiswertes S_t in Einheiten eines Geldmarktfonds

Griechische Symbole

Δ_t^f	erste partielle Ableitung der Preisfunktion eines Derivats f nach dem Basiswert S_t
ε_t	Störterm im linearen Regressionsmodell
ϑ	Volatilität der Volatilität beziehungsweise Varianz im HESTON-Modell
κ	Mean Reversion Speed im HESTON-Modell
μ	Driftrate der geometrischen Brownschen Bewegung
σ^2	Varianzrate des Kursprozess des Basiswertes S_t
σ_t	Prozess der instantanen Volatilität
σ_t^2	Prozess der instantanen Varianz
σ^I	implizite Volatilität
σ^{I-ATMF}	implizite ATMF-Volatilität
$\hat{\sigma}$	Schätzer für die Volatilität
$\Phi(\cdot)$	kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
Ω	Stichprobenraum/Grundraum

1 Einleitung

Die Volatilität (abgeleitet vom lat. „volare“= fliegen) gilt im finanzwirtschaftlichen Kontext als eine Kennzahl für das Ausmaß der Renditeschwankungen eines Finanztitels. Mit der Veröffentlichung der Beiträge von BLACK/SCHOLES (1973) und MERTON (1973) zur Bestimmung des arbitragefreien Preises von Aktienoptionen, stieg die Bedeutung der Volatilität rasant an.¹ Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Handelbarkeit und dem Informationsgehalt von Volatilitätsindizes. Bei Volatilitätsindizes handelt es sich um Indizes, die Auskunft über die gegenwärtig im Markt eingepreisten Erwartungen bezüglich der Schwankungsintensität der Renditen des dem Index zugrunde liegenden Basiswertes über einen bestimmten zukünftigen Zeitraum (in der Regel 30 bis 45 Tage) geben. Die für den deutschen Aktienmarkt relevanten Volatilitätsindizes sind der VDAX und der VDAX-New der Deutsche Börse AG. Volatilitätsindizes werden in der medialen Berichterstattung oftmals als eine Art „Angstbarometer“ herangezogen und erfahren insbesondere in Phasen fallender Kursnotierungen zunehmendes öffentliches Interesse.

Im Jahr 1993 kam es in den USA durch die Chicago Board Options Exchange (CBOE) zur Einführung des ersten Volatilitätsindex, dem VIX. Das deutsche Pendant, der VDAX, wurde ein Jahr später von der Deutsche Börse AG aufgelegt. Im Zuge der Einführung neuer Indizes stellt sich immer auch die Frage nach deren Handelbarkeit. Diese ist gerade dann von Bedeutung, wenn es um die Auflegung derivativer Anlageprodukte geht, bei denen ein Index als Basiswert fungieren soll. Da das Interesse, Volatilität als eigene Anlageklasse investierbar zu machen, seit Anfang der neunziger Jahre zunehmend größer wurde, traf dies im Besonderen auf Volatilitätsindizes zu. Ein Grund für das zunehmende Interesse, Volatilität als eigene Anlageklasse handelbar zu machen, stellte sicherlich die im Rahmen der Globalisierung angestiegene Korrelation zwischen den Aktienmärkten weltweit dar, wodurch das Diversifikationspotenzial innerhalb der Anlageklasse „Aktie“ zunehmend abnahm.² Dies sorgte dafür, dass Investoren zunehmend auf der Suche waren, neue Anlageklassen ausfindig zu machen, die eine möglichst geringe, idealerweise sogar negative Korrelation zu klassischen Aktieninvestments aufweisen, um so insbesonde-

¹Eine sehr wichtige Bedeutung kam der Renditevarianz beziehungsweise -volatilität bereits im Jahr 1952 in der von MARKOWITZ entwickelten Portfoliotheorie zu.

²Vgl. THOMAS (2008), S. 10.

re in Zeiten fallender Kursnotierungen an den Aktienmärkten für eine Stabilisierung der Portfoliowerte der Investoren zu sorgen. Ob die Volatilitätsindizes hierbei als solche beziehungsweise als Basiswert derivativer Anlageprodukte, insbesondere aus der Sicht eines Privatanlegers, Abhilfe schaffen können, gilt es im weiteren Verlauf der Arbeit zu klären.

Eine weitere Aufgabe, die einem Volatilitätsindex zugesprochen wird, ist dessen Informationsfunktion. BLACK/SCHOLES (1973) und MERTON (1973) (kurz: BSM) zeigen, dass die Volatilität als das zentrale Element in die Bewertung von Optionen beziehungsweise bedingter Zahlungsverprechen eingeht. Problematisch ist nur, dass die Volatilität selbst nicht beobachtbar ist. Da jedoch alle weiteren Parameter für die Bestimmung des arbitragefreien Preises einer Option nach dem BSM-Modell leicht zu identifizieren sind, ist man in der Praxis dazu übergegangen, die Volatilität aus am Markt beobachtbaren Optionspreisen zu bestimmen. Die so geschätzte implizite Volatilität, wird dann für gewöhnlich als die vom Markt erwartete zukünftige Volatilität über die Laufzeit der Option interpretiert und als Schätzer für eben diese verwendet. Volatilitätsindizes bieten sich ebenfalls als Prognosewerte zukünftiger Volatilitäten an, da es sich bei ihnen ebenfalls um implizite Volatilitäten beziehungsweise Varianzen handelt. Bei den neueren Volatilitätsindizes kommt hinzu, dass diese nicht an ein bestimmtes Optionspreismodell gebunden sind, und somit eine modellunabhängige Prognose erlauben.

Die Informationsfunktion von Volatilitätsindizes reicht aber noch weiter. Sie können nicht nur für die Prognose zukünftiger Volatilitäten genutzt werden, sondern mit ihnen ist es auch möglich auf im Markt eingepreiste (Varianz-)Risikoprämien zu schließen. Konnte man sich lange Zeit mit dem Gedanken anfreunden, dass die Renditevarianz im Zeitablauf konstant respektive deterministisch ist, so ist es heute Konsens, dass die Renditevarianz selbst mit Unsicherheit behaftet und somit als eine stochastische Variable aufzufassen ist. Dieses in der Varianz inhärente Risiko sollte sich dann konsequenterweise auch in den Preisen von Finanztiteln niederschlagen. Für einen Anleger bedeutet dies, dass er sich neben der Unsicherheit über die zukünftigen Renditen auch der Unsicherheit über die Varianz der zukünftigen Renditen eines Finanztitels ausgesetzt sieht.³ Von Interesse scheint somit die Frage, wie

³Vgl. CARR/WU (2006a), S. 21.

Marktteilnehmer diese Unsicherheit bezüglich der Varianz der zukünftigen Renditen bewerten und ob das Varianzrisiko als eigenständiger Risikofaktor betrachtet werden kann. Da es sich bei den ab dem Jahr 2003 eingeführten Volatilitätsindizes um eine (modellunabhängige) Approximation der erwarteten zukünftigen Renditevarianz unter dem äquivalenten Martingalmaß handelt, ist es möglich, aus der Differenz zwischen der ex post aufgetretenen Varianz und dem quadrierten Volatilitätsindex, eine robuste Schätzung der Varianzrisikoprämien des zugrunde liegenden Marktes durchzuführen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. Die zwei dem Einleitungsteil folgenden Kapitel umfassen zunächst die grundlegende Einführung in die in dieser Arbeit behandelte Thematik. Es wird die Konzeption eines Volatilitätsindex sowie dessen konkrete Berechnung vorgestellt. Anschließend werden mit dem Varianz-Swap und dem Volatilitäts-Swap zwei für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Volatilitätsderivate präsentiert.

Das vierte Kapitel befasst sich mit der Analyse der Handelbarkeit der beiden Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG. Zunächst geht es darum, die Berechnungskonzepte beider Indizes in Verbindung mit marktgehandelten derivativen Finanzinstrumenten zu bringen. Anschließend gilt es zu überprüfen, inwiefern der von der Deutsche Börse AG im April 2005 neu eingeführte VDAX-New sich tatsächlich durch eine im Vergleich zu seinem Vorgänger, dem VDAX, verbesserte Handelbarkeit auszeichnet. Dies wird als ein entscheidendes Motiv für die Einführung des VDAX-New seitens der Indexbetreiber angeführt. Es wird gezeigt, dass eine Verbesserung hinsichtlich der Handelbarkeit durch die Neueinführung des VDAX-New nicht ohne weiteres gegeben ist. Das Kapitel basiert auf SCHÖNE (2009).

Im fünften Kapitel geht es um die Analyse des Informationsgehaltes der beiden Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New. Zu Beginn wird die Motivation für die Verwendung impliziter Volatilitäten als Prognose zukünftiger Volatilitäten dargestellt und verschiedene Ansätze zur Schätzung der Volatilität über einen gegebenen Zeitraum vorgestellt. Daran anknüpfend wird im Rahmen einer Regressionsanalyse überprüft, inwiefern sich die Volatilitätsindizes als Prognose zukünftiger Volatilitäten eignen und ob diese Eignung von dem verwendeten Volatilitätsschätzer abhängig

ist. Die Schätzung der Volatilität des DAX geschieht hierbei zum einen auf Basis von Tagesdaten, zum anderen auf Basis hochfrequenter Intratagesdaten. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass der Informationsgehalt des VDAX-New gegenüber dem des VDAX etwas höher ausfällt und von dem für die Schätzung der Volatilität verwendeten Verfahren abhängig ist. Ferner zeigt sich, dass Volatilitätsindizes eine verzerrte Prognose der zukünftigen Volatilität liefern. Das Kapitel basiert auf SCHÖNE (2010).

Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit der empirischen Analyse von Varianzrisikoprämien auf sechs nationalen Aktienmärkten. Die Schätzung der Varianzrisikoprämien geschieht auf Basis der landeseigenen Volatilitätsindizes. Nachdem zunächst die theoretische Motivation für die Verwendung von Volatilitätsindizes zur Schätzung von Varianzrisikoprämien vorgestellt wurde, gilt es anschließend im Rahmen mehrerer Regressionsanalysen unterschiedliche Charakteristika der Varianzrisikoprämien zu untersuchen. Es wird unter anderem gezeigt, dass auf den in dieser Arbeit betrachteten Aktienmärkten negative Varianzrisikoprämien vorliegen und diese durch ein klassisches Gleichgewichtsmodell wie das CAPM nicht vollständig erklärt werden können.

Abschließend werden die wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit noch einmal zusammengefasst und ein Ausblick auf zukünftige Forschungsaktivitäten gegeben.

2 Volatilitätsindizes

2.1 Zur Geschichte und Entwicklung von Volatilitätsindizes

Mit der Veröffentlichung der wegweisenden Artikel von BLACK/SCHOLES (1973) und MERTON (1973) und der Eröffnung der Chicago Board Options Exchange (CBOE)⁴ im gleichen Jahr, konnte sich ab Mitte der 1970er Jahren der Optionsmarkt in den USA etablieren. Als Vorreiter von Volatilitätsindizes gelten *Optionsindizes*, die erstmals Ende der 1970er Jahre ins Gespräch gebracht wurden.⁵ Die vorgeschlagenen Konzepte für die Optionsindizes orientieren sich dabei stark an dem eines Aktienindex, da diese darauf abzielen, die (durchschnittliche) Prämienentwicklung einer Optionsposition abzubilden.⁶ Optionsindizes stellten sich jedoch letztlich als wenig praktikabel heraus und konnten sich daher in der Praxis nicht durchsetzen.⁷ GASTINEAU (1977) weist erstmals darauf hin, dass es nicht das absolute sondern das relative Prämienniveau ist, was für die Marktteilnehmer von Interesse sei. Konkret schlägt er dabei für den Index ein Durchschnittswert der Relation von impliziter zu historischer Volatilität für einen Korb von 14 Basiswerten vor. BRENNER/GALAI diskutieren 1989 dann erstmals konkret die Idee eines *Volatilitätsindex*.⁸ Das Hauptaugenmerk der Autoren liegt dabei auf der Möglichkeit, mit Hilfe von Futures und Optionen auf Volatilitätsindizes effektive Absicherungsstrategien gegenüber sich ändernden Volatilitätsniveaus ausführen zu können. Wie ein Volatilitätsindex konkret berechnet werden sollte, wird von den Autoren jedoch nicht thematisiert.

Im Jahr 1993 kam es in den USA durch die CBOE schließlich zur Einführung des ersten Volatilitätsindex, dem VIX (heute VXO). Der VXO bildet die von den Marktteilnehmern für die kommenden 30 Tage erwartete Volatilität des S&P 100 Index ab.⁹ Auf Grundlage des Optionspreismodells von BSM werden mittels eines geeigneten Iterationsverfahrens die impliziten Volatilitäten eines Fächers von acht

⁴Die CBOE war die weltweit erste Handelsplattform, die den Handel von börsennotierten, standardisierten Optionskontrakten ermöglichte.

⁵Vgl. GASTINEAU (1977), GALAI (1979) und COX/RUBINSTEIN (1985).

⁶Vgl. THOMAS (2008), S. 169 ff.

⁷Die von COX/RUBINSTEIN (1985) vorgeschlagene Methodik zur Konstruktion eines Optionsindex wurde von der CBOE 1979 in Form des *CBOE Call Option Index* aufgegriffen. Die Berechnung des Index wurde allerdings bereits vier Jahre später wieder eingestellt. Vgl. THOMAS (2008), S. 171.

⁸Vgl. BRENNER/GALAI (1989).

⁹Vgl. CBOE (2003), S. 1.

an der CBOE handelbaren am Geld notierenden Indexoptionen ermittelt, welche die gesuchte Laufzeit umschließen und mittels linearer Interpolation über die nächsten beiden Fälligkeiten für eine konstante Restlaufzeit von 30 Tagen als ein Index veröffentlicht. Das deutsche Pendant zum VXO, der VDAX, wurde im Dezember 1994 von der Deutsche Börse AG ins Leben gerufen. Der Index beruht auf einem nahezu identischen Berechnungsschema mit dem Unterschied, dass dieser die aktuell vom Markt erwartete Volatilität des DAX Index für die nächsten 45 Tage abbildet, und nicht acht sondern nur vier Optionen als Grundlage für die Ermittlung einer durchschnittlichen impliziten Volatilität herangezogen werden. Hinzu kommt, dass beim VDAX auf die von Praktikern und Theoretikern kritisierte Konvertierung der annualisierten impliziten Volatilität in eine sich auf Handelstage beziehende Volatilität verzichtet wurde.¹⁰

Im Jahr 2003 kam es dann zu einer Modernisierung der Indexberechnung des VXO. Dass die bisherige Kalkulation der CBOE lediglich eine punktuelle Aufnahme der impliziten Volatilität ermöglichte und nicht den gesamten Volatilitäts-Skew¹¹ abbildete, war nur ein Kritikpunkt. Die entscheidende Schwachstelle war die fehlende Möglichkeit der Erstellung eines Replikationsportfolios, weswegen dem Index nur eine rein deskriptive Bedeutung zukam.¹² Mit dem in Zusammenarbeit mit Goldman Sachs 2003 neu eingeführten VIX Index, wurde das Ziel verfolgt, auf Basis einer neuen Kalkulationsgrundlage, eine verbesserte Handelbarkeit zu erreichen. Inwiefern diese Zielsetzung tatsächlich erreicht werden konnte, wird im weiteren Verlauf der Arbeit noch zu klären sein. Der VIX bezieht sich zum einen auf den marktbreiteren S&P 500 Index und zum anderen erfolgt die Indexberechnung nicht länger auf Grundlage impliziter Volatilitäten, sondern impliziter Varianzen.¹³ Der Ansatz beruht auf der Replikation der (durchschnittlichen) quadratischen Variation. Veröffentlicht wird als Quadratwurzel der Varianz jedoch weiterhin die Volatilität. Die

¹⁰Vgl. CARR/WU (2006a), S. 14.

¹¹Entgegen der im BSM-Modell getroffenen Annahme einer konstanten Volatilität, lässt sich an Optionsmärkten in der Realität beobachten, dass Optionen mit niedrigen Basispreisen eine höhere Volatilität implizieren als Optionen mit höheren Basispreisen. Demnach sind zur Bewertung von Optionen mit niedrigem Basispreis (d.h. weit aus dem Geld liegende Put-Optionen oder weit im Geld liegende Call-Optionen) höhere Volatilitäten zu verwenden, als bei der Bewertung von Optionen mit hohem Basispreis (d.h. weit aus Geld liegende Call-Optionen oder weit im Geld liegende Put-Optionen). Dieses Phänomen ist unter dem Namen *Volatilitäts-Skew* bekannt. Vgl. HULL (2008), S. 395.

¹²Vgl. THOMAS (2008), S. 174.

¹³Vgl. GOLDMAN SACHS (2007a), S. 27.

Deutsche Börse AG schloss sich im April 2005 der neuen Kalkulationsmethode der CBOE an und führte mit dem VDAX-New einen äquivalenten Volatilitätsindex auf den DAX Index ein. Es folgten weitere Volatilitätsindizes in Ländern wie der Schweiz, Frankreich, dem Vereinigten Königreich, Belgien und den Niederlanden, die ebenfalls nach der neuen Kalkulationsmethode berechnet werden.

2.2 Berechnungskonzepte von Volatilitätsindizes

2.2.1 Berechnungskonzept des VDAX-Index

Der VDAX gilt als Maß für die implizite ATMF¹⁴-Volatilität, welche in den an der EUREX gehandelten DAX-Optionskontrakten eingepreist ist. Der Indexstand des VDAX Index gibt damit einen Anhaltspunkt für die von den Marktteilnehmern für einen zukünftigen Zeitraum erwartete Schwankungsintensität der DAX Renditen. Für am Geld notierende DAX-Optionen, die eine Restlaufzeit von maximal zwei Jahren aufweisen, werden acht Subindizes $i = 1, \dots, 8$ mit Laufzeiten von 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 und 24 Monaten verteilt. Die Anzahl der Subindizes ermittelt sich aus der Anzahl der verfügbaren Optionsserien. Zusätzlich wird ein VDAX Hauptindex mit einer konstanten Restlaufzeit von 45 Tagen berechnet.

Ausgangspunkt der Indexberechnung ist die Optionspreisformel von BSM beziehungsweise die von BLACK (1976) leicht modifizierte Formel für die Bewertung von Forwards- beziehungsweise Futures-Optionen gemäß¹⁵

$$V_{t_0}(C(T_i, K)) = e^{-r(T_i-t_0)} [F_{t_0, T_i} \Phi(d_+) - K \Phi(d_-)] \quad (1)$$

$$V_{t_0}(P(T_i, K)) = e^{-r(T_i-t_0)} [K \Phi(-d_-) - F_{t_0, T_i} \Phi(-d_+)] \quad (2)$$

mit

$$d_{\pm} \equiv \frac{\ln\left(\frac{F_{t_0, T_i}}{K}\right)}{\sigma \sqrt{T_i - t_0}} \pm \frac{\sigma \sqrt{T_i - t_0}}{2} \quad \text{und} \quad \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz \quad .$$

¹⁴Die Abkürzung „ATMF“ steht für „at the money Forward“. Für den Basispreis K einer ATMF-Option gilt $K = F_{t,T}$, wobei $F_{t,T}$ dem Forward-Preis mit Fälligkeit T im Zeitpunkt t entspricht.

¹⁵Für konkrete Informationen zur Datengewinnung, -filterung und -aufbereitung sei auf DEUTSCHE BÖRSE (2007) verwiesen. Die weiteren Ausführungen orientieren sich am Leitfaden zu den Volatilitätsindizes der Deutsche Börse AG, DEUTSCHE BÖRSE (2007).

Mittels einer geeigneten Normierung gemäß

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{e^{-r(T_i-t_0)} V_{t_0}(C(T_i, K))}{\sqrt{F_{t_0, T_i} K}}, \quad p \equiv \frac{e^{-r(T_i-t_0)} V_{t_0}(P(T_i, K))}{\sqrt{F_{t_0, T_i} K}}, \quad f \equiv \frac{F_{t_0, T_i}}{\sqrt{F_{t_0, T_i} K}}, \\ v &\equiv \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T_i - t_0}, \quad u \equiv \ln(f) \end{aligned} \quad (3)$$

können die Optionspreise als Funktion des logarithmierten normierten Forward- beziehungsweise Futures-Preises und der normierten Volatilität ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} c &= e^{+u} \Phi(+u + v) - e^{-u} \Phi(+u - v) \equiv f(u, v) \\ p &= e^{-u} \Phi(-u + v) - e^{+u} \Phi(-u - v) \equiv g(u, v) \end{aligned} \quad (4)$$

Durch Ausnutzung der sich dadurch ergebenden Symmetrie zwischen Call- und Put-Preisen,¹⁶

$$\begin{aligned} o(u, v) &= f(u, v) \\ o(u, v) &= g(-u, v), \end{aligned} \quad (5)$$

ist es möglich, die Optionspreisformel, welche dem VDAX-Index zugrunde liegt, wie folgt darzustellen:

$$o(u_{t_0}, v) = e^{u_{t_0}} \Phi\left(\frac{u_{t_0}}{v} + v\right) - e^{-u_{t_0}} \Phi\left(\frac{u_{t_0}}{v} - v\right) \quad (6)$$

Demnach kann für die geeignet normierten Call und Put Preise eine identische Bewertungsformel zum Zeitpunkt t_0 gemäß (6) angegeben werden.¹⁷

Sind alle Werte bestimmt, welche in die Gleichung (6) eingehen,¹⁸ werden für alle Optionen der vorgegebenen $i = 1, \dots, 8$ Restlaufzeiten die einzelnen impliziten Volatilitäten v berechnet. Da es jedoch nicht möglich ist, die dargestellte Optionspreisformel (6) nach dem Volatilitätsparameter v aufzulösen, wird die gesuchte Größe mit Hilfe eines Iterationsverfahrens (dem NEWTON/RAPHSON-Verfahren) ermittelt.¹⁹

¹⁶Die Symmetrie lässt sich auf die dem BLACK-Modell zugrunde liegende Annahme normalverteilter logarithmierter Renditen zurückführen.

¹⁷Vgl. DEUTSCHE BÖRSE (2007), S. 10 ff.

¹⁸Es handelt sich hierbei insbesondere um die (normierten) Call- und Put-Prämien, welche in die Indexberechnung eingehen, wobei die Auswahl mittels genau festgelegter Kriterien erfolgt. Zudem gilt es, den relevanten Forward- beziehungsweise Futures-Preis unter Verwendung der Put-Call Parity $F_{t_0, T_i} = K + e^{r(T_i-t_0)} \cdot (V_{t_0}(C(T_i, K)) - V_{t_0}(P(T_i, K)))$ zu bestimmen, welcher nach entsprechender Normierung in Gleichung (6) einfließt.

¹⁹Ziel ist es hierbei, die Volatilität zu bestimmen, welche die Differenz zwischen dem Modellwert

Zur Kalkulation eines Subindex \tilde{v}_{t_0, T_i} beziehungsweise der approximated impliziten ATMF-Volatilität der Fälligkeit T_i , werden die beiden Optionspaare mit den am nächsten liegenden Basispreisen ober- und unterhalb des relevanten Forward-Preises F_{t_0, T_i} ausgewählt und die jeweiligen impliziten Volatilitäten gemäß des Abstands der Basispreise vom Wert des Forwards beziehungsweise Futures gewichtet:

$$\tilde{v}_{t_0, T_i} = \gamma_l \cdot \frac{(v_l^p + v_l^c)}{2} + \gamma_h \cdot \frac{(v_h^p + v_h^c)}{2} \quad (7)$$

wobei $\gamma_l \equiv \frac{K_h - F_{t_0, T_i}}{K_h - K_l}$, $\gamma_h \equiv 1 - \gamma_l$ und

\tilde{v}_{t_0, T_i} : Subindex i , d.h. die normierte Volatilität der Laufzeit T_i

F_{t_0, T_i} : Gegenwärtiger Forward-/Futures-Preis der entsprechenden Laufzeit T_i

v : Volatilität einer einzelnen Option

K : Basispreis der Option

Die Indizes h und l geben an, ob der höhere oder der tiefere Basispreis ober- oder unterhalb des relevanten Forward-Preises F_{t_0, T_i} gemeint ist. Sobald der Forward beziehungsweise Futures F_{t_0, T_i} das Spektrum der verfügbaren impliziten Volatilitäten verlässt, d.h. über oder unter einem Basispreis hinweg wandert, erfolgt eine automatische Neuauswahl der Optionspaare.²⁰ In einem nächsten Schritt erfolgt dann die Umkehrung der in (3) vorgenommenen Normierungen und die Transformation zum eigentlichen VDAX:

$$\text{VDAX}_{t_0, T_i} = \frac{2}{\sqrt{T_i - t_0}} \cdot \tilde{v}_{t_0, T_i} \cdot 100. \quad (8)$$

Die Kalkulation der Subindizes \tilde{v}_{t_0, T_i} basiert demnach auf der Annahme, dass die implizite Volatilität konstant ist und die logarithmierten Renditen approximativ normalverteilt sind.

Die Subindizes haben die Eigenschaft, dass sie keine konstante Restlaufzeit haben, und schließlich verfallen. Der VDAX-Hauptindex verfolgt daher das Ziel, ein

und dem beobachtbaren Marktpreis minimiert. Auf Basis der geschätzten Werte wird das Verfahren iterativ angewendet, bis eine hinreichend kleine Differenz zwischen Modellwert und Marktpreis erreicht wurde (Vgl. THOMAS (2008), S. 140). Im Falle des VDAX wird eine Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-6}$ angestrebt.

²⁰Vgl. DEUTSCHE BÖRSE (2007), S. 16 ff.

Volatilitätsindex über ein gleitendes Zeitintervall fixer Länge darzustellen. Hierbei wird so vorgegangen, dass aus der Interpolation der Subindizes \tilde{v}_{t_0, T_i} und $\tilde{v}_{t_0, T_{i+1}}$, welche die Restlaufzeit von $\tilde{T} = 45$ Tagen umschließen, der laufzeitunabhängige VDAX-Index bestimmt wird:

$$\widetilde{\text{VDAX}}_{t_0, \tilde{T}} = \sqrt{\tilde{v}_{t_0, T_i}^2 \cdot \gamma_i + \tilde{v}_{t_0, T_{i+1}}^2 \cdot \gamma_{i+1}} \quad (9)$$

mit $\gamma_i \equiv \frac{T_{>45} - T_{45}}{T_{>45} - T_{<45}}$, $\gamma_{i+1} \equiv 1 - \gamma_i$.²¹ Diese Vorgehensweise setzt demnach voraus, dass die DAX-Preisschwankungen der relevanten Zeiträume statistisch unabhängig voneinander sind und es daher zulässig ist, die Einzelvarianzen zur Varianz der Gesamtverteilung aufzuaddieren. Analog zu den Subindizes erfolgt die Rücktransformation zum VDAX Hauptindex gemäß

$$\text{VDAX}_{t_0, \tilde{T}} = \frac{2}{\sqrt{\tilde{T} - t_0}} \cdot \widetilde{\text{VDAX}}_{t_0, \tilde{T}} \cdot 100. \quad (10)$$

2.2.2 Berechnungskonzept des VDAX-New-Index

Das VDAX-New-Modell der Deutsche Börse verfolgt das Ziel, Volatilität (das Schwanungsverhalten der Kursrenditen) handelbar zu machen, da die Konstruktion des VDAX hinsichtlich fehlender Replikationsmöglichkeiten kritisiert wurde.²² Die Berechnung des Index erfolgt dabei nicht über die implizite Volatilität selbst, sondern über die quadrierte Volatilität—die implizite Varianz.²³ Die implizite Varianz kann aus dem Marktpreis eines speziellen über eine breite Spanne von Basispreisen aufgelegten Optionsportfolios bestimmt werden und ist im Gegensatz zum VDAX weitgehend *modellunabhängig*. Zudem erfolgte eine Modifikation hinsichtlich der durch den Index abzubildenden Laufzeit. Bezog sich der VDAX noch auf die erwartete 45-Tages Volatilität, wird durch den VDAX-New nun die Quadratwurzel der von den Marktteilnehmern erwarteten Varianz der nächsten 30 Tage abgebildet. Da Optionen mit einer Restlaufzeit von 30 Tagen aber nur einmal monatlich gehandelt

²¹Vgl. DEUTSCHE BÖRSE (2007), S. 17 ff. und THOMAS (2008), S. 182.

²²Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, ist das nachfolgende Berechnungskonzept, welches dem VDAX-New zugrunde liegt, das heute gängige Modell zur Kalkulation eines Volatilitätsindex. Die konkreten Berechnungsvorschriften werden daher nur anhand des VDAX-New vorgestellt, sie sind aber mit denen des VIX und der Volatilitätsindizes der NYSE Euronext identisch.

²³Vgl. DEUTSCHE BÖRSE (2007), S. 19.

werden, ist es nötig, sich hier Abhilfe zu verschaffen. Man geht daher, analog zum Vorgänger-Modell des VDAX-Index, so vor, dass mehrere Subindizes verschiedener Laufzeiten berechnet werden, die jeweils die Volatilität bis zu den der Laufzeit entsprechenden Verfalltagen abbilden. Der finale Indexwert berechnet sich dann mittels linearer Interpolation der beiden laufzeitmäßig benachbarten Subindizes. Dieser gibt sodann die Volatilität mit einer Laufzeit von 30 Tagen an. Die $i = 1, \dots, 8$ Subindizes mit den zugehörigen Restlaufzeiten $T_i - t_0$ berechnen sich unter Berücksichtigung der $j = 0, \dots, J$ Optionen dabei wie folgt:²⁴

$$\text{VDAX-New}_{t_0, T_i} = \sqrt{v_{t_0, T_i}^2} \cdot 100, \quad (11)$$

wobei

$$v_{t_0, T_i}^2 = \frac{2}{T_i - t_0} \sum_j \frac{\Delta K_{T_i, j}}{K_{T_i, j}^2} \cdot R_{t_0, T_i} \cdot M(K_{T_i, j}) - \frac{1}{T_i - t_0} \left(\frac{F_{t_0, T_i}}{K_{T_i, 0}} - 1 \right)^2 \quad (12)$$

mit²⁵

T_i : Restlaufzeit der i -ten Option

$K_{T_i, 0}$: ATMF-Basispreis, wobei $K_{T_i, 0} \leq F_{T_i}$

$K_{T_i, j}$: Basispreis der j -ten OTM-Option der Fälligkeit T_i

$\Delta K_{T_i, j}$: Hälftiger Abstand zwischen dem nächsthöheren und dem nächstniedrigeren

Basispreis, formal $\Delta K_{T_i, j} \equiv \frac{K_{T_i, j+1} - K_{T_i, j-1}}{2}$

R_{t_0, T_i} : Aufzinsungsfaktor: $e^{r(T_i - t_0)}$

$M(K_{T_i, j})$: OTM-Optionspreis mit Basispreis $K_{T_i, j}$

$M(K_{T_i, 0})$: Durchschnitt aus Call- und Put-Preis am ATMF-Basispreis $K_{T_i, 0}$

F_{t_0, T_i} : Forward-Preis der Laufzeit T_i , abgeleitet aus den Optionspreisen des Optionspaares (Put-Call Parity) mit der absolut geringsten Preisdifferenz

²⁴Für konkrete Informationen zur Datengewinnung, -filterung und -aufbereitung sei auf DEUTSCHE BÖRSE (2007) verwiesen.

²⁵Vgl. DEUTSCHE BÖRSE (2007), S. 19 ff. und GOLDMAN SACHS (2007a), S. 28.

Die Berechnungsvorschrift für den laufzeitunabhängigen VDAX-New Hauptindex mit einer konstanten Restlaufzeit von $\tilde{T} = 30$ Tagen lautet dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{VDAX-New}_{t_0, \tilde{T}} &= 100 \cdot \sqrt{\left[\tau_i \cdot v_{t_0, T_i}^2 \cdot \gamma_i + \tau_{i+1} \cdot v_{t_0, T_{i+1}}^2 \cdot \gamma_{i+1} \right] \cdot \frac{d^{365}}{d^{30}}} \\ &= \sqrt{\left[\tau_i \cdot \text{VDAX-NEW}_{t_0, T_i}^2 \cdot \gamma_i + \tau_{i+1} \cdot \text{VDAX-NEW}_{t_0, T_{i+1}}^2 \cdot \gamma_{i+1} \right] \cdot \frac{d^{365}}{d^{30}}} \end{aligned} \quad (13)$$

mit

$$\gamma_i \equiv \frac{d_{i+1} - d^{30}}{d_{i+1} - d_i}, \gamma_{i+1} \equiv 1 - \gamma_i$$

d_i : Zeit bis zur Fälligkeit der i -ten DAX-Option (in Sekunden)

d_{i+1} : Zeit bis zur Fälligkeit der $i + 1$ -sten DAX-Option (in Sekunden)

d^x : Zeit für die folgenden x Tage (in Sekunden)

τ_i : Restlaufzeit der i -ten DAX-Option in Jahren, wobei $\tau_i = d_i/d_{365}$

Um ein tiefergehendes Verständnis des Volatilitätshandels und der den Volatilitätsindizes zugrunde liegenden Finanzinstrumente zu bekommen, ist es erforderlich sich zunächst mit den wichtigsten Finanzinstrumenten zu befassen, welche einen reinen Handel der Volatilität respektive Varianz ermöglichen. Es handelt sich hierbei um den Volatilitäts-Swap und den Varianz-Swap.

3 Volatilitätsderivate

3.1 Vorbemerkungen

Delta-neutrale Optionspositionen waren lange Zeit die gängige Herangehensweise um auf Änderungen des Volatilitätsniveaus zu spekulieren.²⁶ Der Ansatz, Volatilität mittels einer Delta-neutralen Optionsposition zu handeln, hat jedoch eine gravierende Schwachstelle: der Ertrag, den ein Investor mit Hilfe dieser Strategie generiert, hängt entscheidend vom Kursverlauf des Basiswertes während des Anlagezeitraumes ab. Dieses Problem hat letztlich die Entwicklung von *Volatilitätsderivaten* angetrieben. Bei Volatilitätsderivaten handelt es sich um Finanzinstrumente, deren Wertentwicklung von der Schwankungsintensität der Renditen eines zugrunde liegenden Basiswertes abhängt. Das Kursniveau des Basiswertes wirkt sich dabei nicht auf den Wert des Derivats aus.²⁷ Als zwei moderne Innovationen auf den Swapmärkten machten der Volatilitäts- und der Varianz-Swap als die ersten Volatilitätsderivate Anfang der neunziger Jahre erstmals von sich reden.²⁸ Es handelt sich bei diesen um Over-the-Counter (OtC) gehandelte Finanzkontrakte, die es Marktteilnehmern ermöglichen, an der Entwicklung der zukünftigen Schwankungsintensität der Renditen, in Form der Renditevarianz oder -volatilität, eines Basiswertes zu partizipieren.²⁹

²⁶Bei der Ermittlung der Volatilität gilt es zwischen zwei grundlegenden Berechnungsweisen zu unterscheiden—einer historischen beziehungsweise expliziten und einer impliziten Berechnungsweise. Die historische Volatilität ist definiert als die, über einen bestimmten in der Vergangenheit liegenden Zeitraum aufgetretene Schwankungsintensität der Renditen eines Finanzinstruments. Die implizite Volatilität—interpretiert als die von den Marktteilnehmern für einen bestimmten zukünftigen Zeitraum erwartete Volatilität—berechnet sich hingegen über die am Markt beobachtbaren Preise von Optionen beziehungsweise Optionsscheinen, die diese konsistent mit den Werten eines Optionspreismodells (z.B. das BSM-Modell) machen.

²⁷Dies gilt insbesondere für die klassischen Volatilitätsderivate, wie Volatilitäts- und Varianz-Swaps. Mathematisch ausgedrückt gilt somit

$$\frac{\partial^2 V_t(VolD_T)}{\partial \sigma \partial S_t} = 0,$$

wobei $V_t(VolD_T)$ dem Wert eines Volatilitätsderivats entspricht. Das heißt, dass das Vega Exposure eines Volatilitätsderivats unabhängig vom Kurs des Basiswertes S_t ist.

²⁸Vgl. CARR/WU (2009b), S. 3.

²⁹Streng genommen handelt es sich bei diesen beiden Vertragsformen nicht um typische Swap-Kontrakte, sondern um Forward-Kontrakte. Es kommt bei einem Volatilitäts- beziehungsweise Varianz-Swap, im Gegensatz zu einem klassischen Swapgeschäft, nicht an mehreren, während der Laufzeit des Swaps festgelegten Terminen, zu einem Austausch von Zahlungsströmen, sondern nur einmalig bei Fälligkeit des Kontrakts.

3.2 Arbitragefreie Bewertung und Martingalmethodik

Als grundlegendes Bewertungskalkül verwenden wir im weiteren Verlauf der Arbeit die Martingalmethodik.³⁰ Diese beruht auf der Transformation der diskontierten Wertpapierprozesse in Martingale.³¹ Die Grundlage hierfür bildet das Theorem von GIRSANOV,³² welches es erlaubt, Wertpapiere, die eine positive Risikoprämie beinhalten, so zu behandeln als wären diese risikolos.³³ Für die Bewertung wird ein Maßwechsel von dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} hin zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} vorgenommen. Die Martingalmethodik ermöglicht es uns somit, dass wir den arbitragefreien Wert einer gegebenen Zahlungscharakteristik mittels des risikolos diskontierten Erwartungswertes unter dem, zu dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} äquivalenten, Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} bestimmen können.

Ausgangspunkt ist zunächst die Annahme, dass der Kurs des Basiswertes S_t dem Diffusionsprozess

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{\mathbb{P}}, \quad t \in [0, T] \quad \text{und} \quad S_0 > 0 \quad (14)$$

folgt, der auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definiert ist und an die Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{t \in [0, T]}\}$ adaptiert ist. $W_t^{\mathbb{P}}$ bezeichnet hierbei einen standardisierten Wiener-Prozess unter dem (realen) Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Der Driftprozess μ_t ist stetig und von endlicher Variation, der instantane Volatilitätsprozess σ_t ist strikt positiv und erfüllt die Bedingung $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\int_0^T \sigma_u^2 du \right) < \infty$. Beide Prozesse sind an die Filtration \mathbb{F} adaptiert. Die Korrelation des instantanen Volatilitätsprozesses und des den Kursprozess treibenden Wiener-Prozesses sei gegeben durch $\rho \in [-1, 1]$.

³⁰Vgl. HARRISON/KREPS (1979) und WÖSTER (2004), S. 26 ff.

³¹Ein Prozess $(Z_t)_{t \in [0, \infty)}$ ist ein Martingal bezüglich der Informationsmenge \mathcal{F}_s und dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} , wenn gilt

$$Z_s = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} (Z_t | \mathcal{F}_s) \quad \forall s < t.$$

Ein Martingal zeichnet sich dadurch aus, dass es sich im Mittel nicht verändert, d.h. die erwartete durchschnittliche Zuwachsrate Null entspricht (die Drift ist Null); bei einem Martingal wird daher auch von einem fairen Spiel gesprochen:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} (Z_{s+u} - Z_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} (Z_{s+u} | \mathcal{F}_s) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} (Z_s | \mathcal{F}_s) = 0, \quad u > 0$$

³²Vgl. GIRSANOV (1960).

³³Vgl. NEFTCI (2000), S. 315.

Für die Bewertung von Varianz-Swaps spielt die Korrelation keine Rolle. Dies ändert sich jedoch mit Blick auf die Bewertung von Volatilitäts-Swaps. Hier werden wir sowohl den Spezialfall $\rho = 0$ als auch den Fall $\rho \neq 0$ betrachten. Zudem wird von friktionslosen Märkten und von Arbitragefreiheit ausgegangen, so dass (mindestens) ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} existiert, unter dem der in Einheiten des Numeraires $B_t \equiv B_{t,T}$, mit $dB_t = rB_t dt$, $B_T = 1$ ausgedrückte Preisprozess $Y_t = S_t/B_t$ die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \sigma_t Y_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad t \in [0, T] \quad \text{und} \quad Y_0 > 0 \quad (15)$$

löst. Des Weiteren gehen wir davon aus, dass ein Kontinuum europäischer Call- und Put-Optionen über alle Basispreise K von 0 bis ∞ handelbar ist.

Abschließend führen wir noch die quadratische Variation ein. Die quadratische Variation $QV_{0,T}$ ist ein Maß für die Schwankungsintensität der logarithmierten Renditen über einen Zeitraum $[0, T]$, und sie ist letztlich die Größe, die einem Volatilitätsderivat zugrunde liegt. Da wir mit Gleichung (14) von einem stetigen Kursprozess ausgehen, ist die quadratische Variation gegeben durch

$$QV_{0,T} = \int_0^T \sigma_u^2 du .$$

Die quadratische Variation stimmt in diesem Fall mit der integrierten Varianz

$$IV_{0,T} = \int_0^T \sigma_u^2 du$$

überein.

3.3 Varianz-Swaps

Zunächst betrachten wir den Varianz-Swap, da dieser das heute meist gehandelte Volatilitätsderivat ist, und eine Bewertung beziehungsweise Ermittlung einer den Varianz-Swap replizierenden Handelsstrategie ohne großen Aufwand möglich ist.

Der Varianz-Swap ist ein Finanzkontrakt, welcher dem Käufer bei Laufzeitende die Differenz zwischen der durchschnittlichen quadratischen Variation des Zeitraums

$[0, T]^{34}$

$$\mathcal{V}_{0,T} \equiv \frac{1}{T} QV_{0,T} \quad (16)$$

und der bei Abschluss des Geschäfts festgelegten Varianz-Swap-Rate $K_{0,T}^{var}$, bezogen auf einen bestimmten Nominalbetrag N^{var} , auszahlt:³⁵

$$\text{Var}_T = N^{var} \cdot (\mathcal{V}_{0,T} - K_{0,T}^{var}) \quad (18)$$

Bei Abschluss des Geschäfts in $t = 0$ gilt es, die Varianz-Swap-Rate $K_{0,T}^{var}$ zu bestimmen, die den arbitragefreien Wert des Swaps Null werden lässt:

$$V_0(\text{Var}_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [B_{0,T}^{-1} \cdot [N^{var} \cdot (\mathcal{V}_{0,T} - K_{0,T}^{var})] | \mathcal{F}_0] \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow K_{0,T}^{var} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T} | \mathcal{F}_0] \quad (19)$$

Um mit der Bewertung fortzufahren, ist es zunächst erforderlich einen alternativen Ausdruck für die quadratische Variation $QV_{0,T}$ herzuleiten. Wir verwenden daher ITO's Lemma, um den Prozess herzuleiten, dem $\ln(S_t)$ folgt, wenn S_t die Dynamik in (14) aufweist. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass keinerlei Annahmen bezüglich der konkreten stochastischen oder gegebenenfalls auch deterministischen Entwicklung des Volatilitätsprozesses σ_t getroffen wurden. Für $d\ln(S_t)$ ergibt sich bekanntlich³⁶

$$d\ln(S_t) = \left(\mu_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}}. \quad (20)$$

Subtrahieren des Ausdrucks für die Dynamik des logarithmierten Basiswertes $d\ln(S_t)$

³⁴Die Division mit T stellt letztlich eine Annualisierung dar. In der Literatur wird daher bei Gleichung (16) häufig auch von der annualisierten quadratischen Variation gesprochen.

³⁵Als diskrete Berechnungsgrundlage für die (durchschnittliche) quadratische Variation dient der Ausdruck

$$\tilde{V}_{T_N} = A(N) \sum_{i=1}^N \left[\ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \right]^2, \quad (17)$$

wobei $A(N)$ dem Annualisierungsfaktor entspricht. Gleichung (17) ist das in der Praxis gängige Verfahren zur Bestimmung des floating legs eines Varianz-Swap-Kontrakts und stimmt mit der Marktkonvention der ISDA (International Swaps & Derivatives Association) überein (Vgl. ISDA (2007), S. 4). Bei einer hinreichend großen Anzahl der Renditebeobachtungen hat die Vernachlässigung der Mittelwertkorrektur nur einen sehr geringen Einfluss auf die Berechnung der Varianz.

³⁶Vgl. beispielsweise HULL (2008), S. 270 ff.

von $\frac{dS_t}{S_t}$ führt dann auf

$$\frac{dS_t}{S_t} - d\ln(S_t) = \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt. \quad (21)$$

beziehungsweise nach Integration über $[0, T]$ und Multiplikation mit $2/T$ auf

$$\mathcal{V}_{0,T} = \frac{2}{T} \left(\int_0^T \frac{1}{S_u} dS_u - \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right). \quad (22)$$

Mit Hilfe der Gleichung (22) ist es möglich, eine Strategie anzugeben, die es ermöglicht, die durchschnittliche quadratische Variation des Zeitraums $[0, T]$ zu replizieren. Zunächst soll der zweite Term in Gleichung (22),

$$- \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right),$$

betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um den Gewinn beziehungsweise Verlust aus einer statischen Short-Position in einem *Log-Kontrakt*.³⁷

Exkurs 3.1 (Der Log-Kontrakt) Die Zahlungscharakteristik eines im Zeitpunkt $t = 0$ erworbenen Log-Kontrakts bestimmt sich zum Fälligkeitszeitpunkt T durch

$$L_T = \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = \ln(S_T) - \ln(S_0).$$

Führt man nun die Zerlegung

$$L_T = \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = \ln \left(\frac{S_T}{S^*} \right) + \ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right)$$

durch, und greift auf die

Proposition 3.1 Sei $f : \mathbb{R}_+^0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \int_0^{x_0} f''(k)(k - x)^+ dk + \int_{x_0}^\infty f''(k)(x - k)^+ dk \end{aligned}$$

$\forall x, x_0 \in \mathbb{R}_+^0$.³⁸

³⁷Vgl. KRÜGEL (2007), S. 153.

³⁸Ein Beweis zu Proposition 3.1 findet sich im Anhang.

zurück, ergibt sich für die Funktion $f(S_T) = \ln(S_T)$ mit $x_0 = S^*$ das folgende Resultat:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right) = \frac{1}{S^*}(S_T - S^*) - \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(T, K) dK - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(T, K) dK .$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in die obige Gleichung ein, ergibt sich für den Log-Kontrakt der folgende Ausdruck:

$$L_T = \frac{1}{S^*}(S_T - S^*) - \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(T, K) dK - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(T, K) dK + \ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right)$$

Der Log-Kontrakt setzt sich somit aus einer Long-Position in $1/S^*$ Forward-Kontrakte, einer Short-Position in einem Portfolio bestehend aus europäischen Call- und Put-Optionen über ein Kontinuum von Basispreisen sowie einer Anleiheposition zusammen. Der arbitragefreie Wert des Log-Kontrakts im Zeitpunkt $t = 0$ beträgt dann

$$\begin{aligned} V_0(L_T) &= B_{0,T}^{-1} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L_T | \mathcal{F}_0) \\ &= - \int_0^{F_{0,T}} \frac{1}{K^2} V_0(P(T, K)) dK - \int_{F_{0,T}}^{\infty} \frac{1}{K^2} V_0(C(T, K)) dK , \end{aligned}$$

geht man davon aus, dass der Log-Kontrakt ATMF (das heißt $S^* = F_{0,T}$) abgeschlossen wird.

Der Integralausdruck

$$\int_t^T \frac{1}{S_u} dS_u$$

beschreibt eine dynamische Handelsstrategie im Basiswert S_t . Es handelt sich hierbei um den kontinuierlichen Hedge des Log-Kontrakts.³⁹ Dieser erfordert, dass in jedem infinitesimal kleinen Zeitintervall der Länge dt $1/S_t$ Einheiten des Basiswertes S_t gehalten werden. Die Position ist zu jedem Zeitpunkt t so anzupassen, dass ihr Wert genau einer Geldeinheit entspricht.⁴⁰ Der resultierende Gewinn oder Verlust dieser Handelsstrategie während eines infinitesimal kleinen Zeitintervall dt ist dann gegeben

³⁹Genau genommen handelt es sich bei dem Delta des Log-Kontrakts um den folgenden Ausdruck:

$$\Delta_t^L \equiv \frac{\partial V_t(L_T)}{\partial S_t} = B_{t,T}^{-1} \cdot \frac{1}{S_t}, \quad 0 < t .$$

Es gilt somit noch die Skalierung mit dem Diskontierungsfaktor $B_{t,T}^{-1}$ zu beachten.

⁴⁰Vgl. KRÜGEL (2007), S. 153.

durch $\frac{1}{S_t} dS_t$. Über den gesamten Zeitraum $[0, T]$ summieren sich die Gewinne und Verluste aus dieser dynamischen Handelsstrategie auf zu

$$\int_0^T \frac{1}{S_u} dS_u .$$

Mit dieser dynamischen Handelsstrategie ist es demnach möglich, die in einem Zeitraum dt aufgetretenen Renditen eines Basiswertes über einen gegebenen Zeitraum $[0, T]$ zu akkumulieren.

Aus Gleichung (19) ist bereits bekannt, dass die arbitragefreie Varianz-Swap-Rate $K_{0,T}^{var}$ dem Erwartungswert der quadratischen Variation unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} entsprechen muss. Greift man nun auf die in Gleichung (22) angegebene Darstellung der quadratischen Variation zurück, ergibt sich für die Varianz-Swap-Rate der folgende Ausdruck:

$$K_{0,T}^{var} = \frac{2}{T} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} | \mathcal{F}_0 \right] - \frac{2}{T} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) | \mathcal{F}_0 \right] \quad (23)$$

Bei dem ersten Term handelt es sich um den Marktwert der dynamischen Handelsstrategie im Basiswert S_t , der zweite Term stellt den Marktwert des Log-Kontraktes dar. Der arbitragefreie Wert der dynamischen Handelsstrategie ergibt sich zu

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \frac{dS_u}{S_u} | \mathcal{F}_0 \right] = r \cdot T . \quad (24)$$

Der Erwartungswert des Log-Kontrakts unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) | \mathcal{F}_0 \right] &= \frac{1}{S^*} (S_0 \cdot B_{0,T} - S^*) + B_{0,T} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} V_0(P(T, K)) dK \\ &\quad + B_{0,T} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} V_0(C(T, K)) dK - \ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right) . \end{aligned} \quad (25)$$

S^* stellt hierbei einen Referenzpreis dar, welcher die Grenze zwischen OTM Call-

und Put-Optionen markiert.⁴¹ Einsetzen von (24) und (25) in (23), führt dann auf

$$K_{0,T}^{var} = \frac{2}{T} \cdot r \cdot T - \frac{2}{T} \cdot \left[\frac{1}{S^*} (S_0 \cdot B_{0,T} - S^*) - B_{0,T} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} V_0(P(T, K)) dK \right. \\ \left. - B_{0,T} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} V_0(C(T, K)) dK + \ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right) \right]. \quad (26)$$

Wählt man nun—wie üblich—für S^* den Forward-Kurs ($S^* = F_{0,T}$), ergibt sich ein vereinfachter Ausdruck für die arbitragefreie Varianz-Swap-Rate:

$$K_{0,T}^{var} = \frac{2}{T} \cdot B_{0,T} \cdot \left[\int_0^{F_{0,T}} \frac{1}{K^2} V_0(P(T, K)) dK + \int_{F_{0,T}}^{\infty} \frac{1}{K^2} V_0(C(T, K)) dK \right] \\ = \int_0^{F_{0,T}} w^P(K) V_t(P(T, K)) + \int_{F_{0,T}}^{\infty} w^C(K) V_t(C(T, K)) , \quad (27)$$

wobei $w^P(K) = w^C(K) \equiv 2/T \cdot B_{0,T} \cdot dK/K^2$ die Stückzahl einer Option mit Basispreis K angibt. Die Varianz-Swap-Rate ist damit für $S^* = F_{0,T}$ vollständig durch das Optionsportfolio (die leerverkauften Log-Kontrakte) bestimmt.

3.4 Volatilitäts-Swaps

Ein Volatilitäts-Swap ist ein Kontrakt auf die zukünftige Volatilität eines Basiswertes S_t . Die Berechnung der Volatilität geschieht auf Basis der Quadratwurzel der (durchschnittlichen) quadratischen Variation der logarithmierten Renditen des Zeitraums $[0, T]$:

$$\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} = \sqrt{\frac{1}{T} QV_{0,T}} \quad (28)$$

Der Käufer eines Volatilitäts-Swaps erhält (zahlt) zum Zeitpunkt der Fälligkeit T N^{vol} Geldeinheiten für jeden Punkt, mit welchem die Volatilität $\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}}$ die im Zeitpunkt $t = 0$ festgelegte Volatilitäts-Swap-Rate $K_{0,T}^{vol}$ übersteigt (unterschreitet). Der Käufer tauscht somit einen fixen Betrag $K_{0,T}^{vol}$ gegen die zukünftige Volatilität $\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}}$:

$$\text{Vol}_T = N^{vol} \cdot \left(\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} - K_{0,T}^{vol} \right) \quad (29)$$

Analog zur Vorgehensweise aus Abschnitt 3.3 gilt es, die arbitragefreie Swap-Rate $K_{0,T}^{vol}$ zu bestimmen, die den Wert des Volatilitäts-Swaps bei Abschluss des Geschäfts

⁴¹Vgl. DEMETERFI et al. (1999), S. 9.

(in $t = 0$) Null werden lässt:

$$V_0(\text{Vol}_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_{0,T}^{-1} \cdot \left[N^{var} \cdot \left(\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} - K_{0,T}^{vol} \right) \right] | \mathcal{F}_0 \right] \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow K_{0,T}^{vol} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right] \quad (30)$$

Im Gegensatz zur Bestimmung der arbitragefreien Varianz-Swap-Rate und einer den Kontrakt replizierenden Handelsstrategie, stellt sich die weitere Vorgehensweise im Falle des Volatilitäts-Swaps etwas komplizierter dar. Bis vor dem Erscheinen der Arbeit von CARR/LEE (2005) ging man grundsätzlich davon aus, dass für die Bewertung von Volatilitäts-Swaps eine Modellierung der Volatilität als Zufallsprozess zwingend erforderlich und diese damit abhängig von dem zur Modellierung herangezogenen Modell ist—was im Falle von Varianz-Swaps gerade nicht der Fall ist.⁴² Dies stellt für den Verkäufer eines Volatilitäts-Swaps ein (Modell-)Risiko dar und ist mit ein Grund dafür, dass der Markt für Volatilitäts-Swaps nur über vergleichsweise wenig Liquidität verfügt.⁴³

Bevor wir näher auf die in CARR/LEE (2005) hergeleiteten Resultate eingehen, soll zuvor die für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Beziehung zwischen der Volatilitäts-Swap-Rate und der impliziten ATMF-Volatilität dargestellt werden. Geht man davon aus, dass der instantane Volatilitätsprozess σ_t unabhängig von dem Renditeprozess des Basiswertes ist,⁴⁴ dann lässt sich zeigen, dass die Volatilitäts-Swap-Rate näherungsweise mit der impliziten ATMF-Volatilität übereinstimmt.⁴⁵

$$K_{0,T}^{vol} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right] \approx \sigma_{0,T}^{I-ATMF} \quad (31)$$

Für kurze Zeiträume liefert diese Gleichung sehr zufriedenstellende Resultate. Trifft die Unabhängigkeitsannahme nicht zu, wird aus der Gleichheitsbeziehung in (31) eine Größer-Gleich-Beziehung. Es handelt sich dann bei der impliziten ATMF-Volatilität genau genommen nur noch um eine untere Wertgrenze für die Volatilitäts-Swap-Rate. Die obere Wertgrenze stellt, bedingt durch die JENSEN'sche Ungleichung,⁴⁶

⁴²Dabei ist anzumerken, dass für die Modellierung der Volatilität meist Ein-Faktor-Modelle gewählt werden, die parameterabhängig und damit anfällig für Fehlspezifikationen sind. Vgl. KRÜGEL (2007), S. 142.

⁴³Vgl. ALLEN/EINCHCOMB/GRANGER (2006) S. 92.

⁴⁴Wir werden hierbei im weiteren Verlauf von der „Unabhängigkeitsannahme“ sprechen.

⁴⁵Für eine Herleitung vgl. Abschnitt 5.2.1 oder CARR/WU (2006a), S. 27.

⁴⁶Vgl. Abschnitt 4.3.1.1.

die Quadratwurzel der Swap-Rate eines korrespondierenden Varianz-Swaps dar. Sollte die implizite ATMF-Volatilität um mehr als den Approximationsfehler von der Volatilitäts-Swap-Rate abweichen, ist es möglich, mit einem Portfolio bestehend aus $1/(2 \cdot K_{0,T}^{var})$ Varianz-Swaps und $K_{0,T}^{var}/2$ Anleihen, einen risikolosen Gewinn zu realisieren.⁴⁷ Der entscheidende Schwachpunkt der Approximation (31) aus praktischer Sicht ist jedoch, dass diese keine Hinweise für eine Replikationsstrategie eines Volatilitäts-Swaps gibt und nicht für Zeitpunkte $t \neq 0$ nach Initialisierung des Swaps (wenn der Volatilitäts-Swap also bereits einen Teil des floating-legs beziehungsweise der Volatilität akkumuliert hat) gültig ist. Des Weiteren sollte der Einfluss einer von Null verschiedenen Korrelation nicht vernachlässigt werden.⁴⁸

CARR/LEE (2005) setzen bei den eben genannten Kritikpunkten der Beziehung (31) an, und befassen sich als Vorreiter mit einer robusten⁴⁹ Replikation von Derivaten, deren Auszahlung eine Funktion $f(QV_{0,T})$ zugrunde liegt. Die Autoren zeigen, dass eine modellunabhängige Bewertung von Volatilitäts-Swaps, entgegen der bis dato geläufigen Meinung, durchaus möglich ist. Unter Berücksichtigung der Unabhängigkeitsannahme sind sie in der Lage, Kontrakte auf eine Zahlungscharakteristik $H(S_T)$, die modellunabhängig durch die Werte europäischer Optionskontrakte $V_0(O(K, T))$ bestimmt ist, zu identifizieren, durch die der Wert eines Derivats, dessen Auszahlung eine Funktion $f(QV_{0,T})$ zugrunde liegt, vollständig bestimmt ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(QV_{0,T}) | \mathcal{F}_0) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(H(S_T) | \mathcal{F}_0) \\ &= \int_0^\infty g_f(K) V_0(O(K, T)) dK \end{aligned} \quad (32)$$

Der Term auf der linken Seite stellt den gesuchten Wert des Volatilitätsderivats, der Term auf der rechten Seite den Wert eines Kontrakts auf die Funktion $H(S_T)$ dar. Die Beziehung (32) ist exakt, wenn $\rho = 0$ gilt, und zudem immun gegenüber einer Korrelation $\rho \neq 0$ bis zu Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\rho^2)$. Die konkrete Vorgehensweise sieht vor, die Gewichte $g_f(K)$ so zu bestimmen, dass Gleichung (32) erfüllt ist. CARR/LEE greifen dabei auf die LAPLACE-Transformation⁵⁰ zurück und zerlegen

⁴⁷Vgl. CARR/LEE (2009b), S. 15.

⁴⁸Vgl. CARR/LEE (2009c), S. 18.

⁴⁹Unter einer *robusten* Replikation ist hierbei gemeint, dass weder Annahmen hinsichtlich des Volatilitätsprozesses getroffen noch Parameter geschätzt werden müssen.

⁵⁰Bei der LAPLACE-Transformation handelt es sich um eine Integraltransformation. Die LAPLACE-

so die Funktion f für bestimmte Funktionsklassen in Zahlungscharakteristika der Form $\exp(\lambda)$.⁵¹

Als erstes betrachten wir die sogenannte Basisversion der robusten Bewertung von Volatilitäts-Swaps. Es handelt sich deshalb um eine Basisversion, weil diese ebenso wie die Beziehung in Gleichung (31) nur dann zufriedenstellende Ergebnisse liefert, wenn die Kursprozesse des Basiswertes und der Volatilität tatsächlich unabhängig voneinander sind. Die grundlegende Vorgehensweise unterscheidet sich dabei nicht gravierend von der anschließenden Betrachtung der korrelationsimmunen Bewertung. Zusätzlich zu den bereits erwähnten Annahmen, soll nun noch vereinfachend von $r = 0$ beziehungsweise $S_0 = F_{0,T}$ ausgegangen werden.⁵²

Den Ausgangspunkt stellt zunächst die Replikation des sogenannten Power-Payoffs $f(S_T) = S_T^p$ dar. In Verbindung mit Proposition 3.1 und $S^* = F_{0,T}$ ergibt sich für den arbitragefreien Wert des Power-Payoffs

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T^p | \mathcal{F}_0) = F_{0,T}^p + p \cdot (p-1) \cdot \left(\int_0^{F_{0,T}} \frac{1}{K^{2-p}} V_0(P(T, K)) dK \right. \\ \left. + \int_{F_{0,T}}^{\infty} \frac{1}{K^{2-p}} V_0(C(T, K)) dK \right). \end{aligned} \quad (33)$$

CARR/LEE leiten dann einen Ausdruck für die Laplace-Transformation der quadratischen Variation her, indem sie diese mit dem arbitragefreien Wert des Power Payoffs in Gleichung (33) in Verbindung setzen. Es sei nun $x_T = \ln(S_T/S_0)$, so dass für $p \in \mathbb{R}$

$$e^{p \cdot x_T} = \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^p$$

Transformation $F(s)$ einer Funktion $f(s) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Der Term e^{-st} ist demnach der Transformationskern. Geht man den umgekehrten Weg von der Funktion $F(s)$ hin zur Funktion $f(t)$, das heißt $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, spricht man von der inversen LAPLACE-Transformation.

⁵¹Vgl. GATHERAL/FRITZ (2005), S. 2.

⁵²Die weiteren Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten von CARR/LEE (2005), CARR/LEE (2007), CARR/LEE (2009c) und GATHERAL/FRITZ (2005).

gilt. Berücksichtigt man ferner, dass der logarithmierte Aktienkurs

$$x_T = -\frac{1}{2}QV_{0,T} + \int_0^T \sigma_u dW_u$$

normalverteilt ist mit Erwartungswert $-\frac{1}{2}QV_{0,T}$ und Varianz $QV_{0,T}$, folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{p \cdot x_T} | \mathcal{F}_0) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{p \cdot x_T} | \mathcal{F}_T^{\sigma}) | \mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{(-1/2p \cdot QV_{0,T} + 1/2p^2 \cdot QV_{0,T})} | \mathcal{F}_0\right) \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\lambda \cdot QV_{0,T}} | \mathcal{F}_0) \end{aligned} \quad (34)$$

mit $\lambda \equiv 1/2p^2 - 1/2p \Leftrightarrow p \equiv 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2\lambda}$. An dieser Stelle sind wir nun in der Lage, aufgrund der Beziehung $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{p \cdot x_T} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((S_T/F)^p | \mathcal{F}_0)$, mit Hilfe des Power-Payoffs, ein Replikationsportfolio der momentenerzeugenden Funktion aus Gleichung (34) anzugeben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\lambda \cdot QV_{0,T}} | \mathcal{F}_0) &= \frac{1}{F^p} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T^p | \mathcal{F}_0) \\ &= 1 + \frac{p \cdot (p-1)}{F^p} \cdot \left(\int_0^F \frac{1}{K^{2-p}} V_t(P(T, K)) dK \right. \\ &\quad \left. + \int_F^{\infty} \frac{1}{K^{2-p}} V_t(C(T, K)) dK \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Dies Gleichung lässt sich etwas kompakter darstellen, wenn die Optionspreise relativ zum Basispreis K ausgedrückt werden:

$$c(k) \equiv \frac{V_t(C(T, F_{0,T} \cdot e^k))}{F_{0,T} \cdot e^k} \quad \text{und} \quad p(k) \equiv \frac{V_t(P(T, F_{0,T} \cdot e^k))}{F_{0,T} \cdot e^k},$$

wobei $k = \ln(K/F_{0,T})$. Greift man zudem auf die Put-Call-Symmetrie $p(k) = e^{-k} \cdot c(-k)$ zurück, ergibt sich für Gleichung (35)⁵³

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\lambda \cdot QV_{0,T}}) &= 1 + 2\lambda \left(\int_0^{\infty} c(k) d(k) (e^{k(1-p)} + e^{kp}) \right) \\ &= 1 + 4\lambda \int_0^{\infty} c(k) d(k) e^{k/2} \cosh(k\sqrt{1/4 + 2\lambda}) . \end{aligned} \quad (36)$$

Um die bisherigen Ergebnisse nun konkret auf die Bewertung eines Volatilitäts-Swaps anzuwenden, greifen wir auf die nachfolgende Integraldarstellung der Funk-

⁵³Für die Definition des Kosinus Hyperbolicus gilt bekanntlich $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

tion $f(y) = \sqrt{y}$ zurück:

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda \cdot y}}{\lambda^{3/2}} d\lambda$$

Setzt man $y = QV_{0,T}$ und bildet den Erwartungswert und greift auf das zuvor hergeleitete Ergebnis aus Gleichung (36) zurück, ergibt sich der folgende Ausdruck für die Volatilitäts-Swap-Rate

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\sqrt{QV_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda \cdot QV_{0,T}}}{\lambda^{3/2}} d\lambda \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \int_0^\infty c(k) d(k) e^{k/2} \cosh \left(k \sqrt{1/4 - 2\lambda} \right) \\ &= \sqrt{2\pi} c(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty c(k) dk e^{k/2} I_1 \left(\frac{k}{2} \right), \end{aligned} \quad (37)$$

wobei I_n die modifizierte BESSEL-Funktion erster Art der Ordnung n bezeichnet.⁵⁴

Werden die Optionspreise schließlich wieder in ihre ursprüngliche Form rücktransformiert und $\sqrt{QV_{0,T}}$ mit \sqrt{T} dividiert, führt dies auf die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\sqrt{V_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right) &= w(F_{0,T}) V_0(P(T, F_{0,T})) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w(K) V_0(O(K, T)) \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{F_{0,T} \sqrt{T}} V_0(P(T, F_{0,T})) \end{aligned}$$

Dies stimmt unmittelbar mit Gleichung (31) überein, wenn man die auf BREN-

⁵⁴BESSEL-Funktionen (auch Zylinderfunktionen genannt) sind Lösungen $y(x)$ der BESSEL'schen Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Die BESSEL-Funktion erster Art der Ordnung n

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n}$$

ist für ganzzahlige n eine von zwei linear unabhängigen Lösungen der obigen Differentialgleichung, wobei $\Gamma(\cdot)$ die Gamma-Funktion darstellt. Für rein imaginäre Argumente, werden die Lösungen der BESSEL'schen Differentialgleichung als modifizierte BESSEL-Funktionen bezeichnet. Die modifizierte Bessel-Funktion erster Art der Ordnung n lautet

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+m+1)m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n}$$

Die modifizierte BESSEL-Funktion kann in Microsoft-Excel mit Hilfe der Funktion `BESSELI(x;n)` berechnet werden.

NER/SUBRAHMAN (1988) zurückgehende Approximation der impliziten ATMF-Volatilität

$$\sigma_{0,T}^{I-ATMF} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{F_{0,T}\sqrt{T}} \cdot V_0(P(T, F_{0,T}))$$

berücksichtigt. Wir bereits erwähnt, liefert diese Beziehung nur dann zufriedenstellende Ergebnisse, wenn der Kursprozess des Basiswertes und der Volatilität tatsächlich unabhängig voneinander sind. Es ist jedoch möglich eine bis zu Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\rho^2)$ korrelationsunempfindliche Formel für die Volatilitäts-Swap-Rate anzugeben.

Die Idee dabei ist, eine gewichtete Kombination der Power-Payoffs mit den Exponenten p_{\pm} und den Gewichten θ_{\pm} zusammenzustellen. Die Gewichte θ_{\pm} werden dabei gerade so gewählt, dass eine Immunisierung gegenüber der Korrelation bis zu Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\rho^2)$ gewährleistet ist:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\lambda \cdot QV_{0,T}} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\theta_+ \left(\frac{S_T}{F_{0,T}}\right)^{p_+} + \theta_- \left(\frac{S_T}{F_{0,T}}\right)^{p_-} | \mathcal{F}_0\right), \quad (38)$$

wobei $\theta_{\pm} \equiv 1/2 \mp 1/(2\sqrt{1+8\lambda})$ und $p_{\pm} \equiv 1/2 \pm 1/2\sqrt{1+8\lambda}$. Die Gleichung (38) ist exakt für $\rho = 0$ und bis zu Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\rho^2)$ korrelationsunempfindlich. Einsetzen von Gleichung (38) in Gleichung (37) führt dann auf

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sqrt{QV_{0,T}} | \mathcal{F}_0\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \theta_+ \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\lambda \cdot QV_{0,T}} \left(\frac{S_T}{F_{0,T}}\right)^{p_+} | \mathcal{F}_0\right)}{\lambda^{3/2}} \\ &\quad + \theta_- \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\lambda \cdot QV_{0,T}} \left(\frac{S_T}{F_{0,T}}\right)^{p_-} | \mathcal{F}_0\right)}{\lambda^{3/2}} d\lambda \end{aligned}$$

mit

$$\theta_{\pm} \equiv \theta_{\pm}(-\lambda) \equiv \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1-8\lambda}} \quad \text{und} \quad p_{\pm} \equiv p_{\pm}(-\lambda) \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-8\lambda}.$$

Die Volatilitäts-Swap-Rate kann mit Hilfe der Bessel-Funktion als ein aus Call- und

Put-Optionen zusammengesetztes Optionsportfolio angegeben werden:⁵⁵

$$\begin{aligned}
 K_{0,T}^{vol} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right) &= w^{ST}(F_{0,T}) V_0(ST_T(F_{0,T}, T)) \\
 &+ \int_0^{F_{0,T}} w^P(K) V_0(P(K, T)) + \int_{F_{0,T}}^{\infty} w^C(K) V_0(C(K, T))
 \end{aligned} \tag{39}$$

mit⁵⁶

$$\begin{aligned}
 w^{ST}(F_{0,T}) &\equiv \frac{\sqrt{\pi/2}}{F_{0,T}\sqrt{T}} > 0, \text{ Straddles mit } K = F_{0,T} \\
 w^P(K) &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{8F_{0,T}TK^3}} \left[I_0 \left(\ln(\sqrt{K/F_{0,T}}) \right) - I_1 \left(\ln(\sqrt{K/F_{0,T}}) \right) \right] dK > 0, \\
 &\text{Puts mit } K < F_{0,T} \\
 w^C(K) &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{8F_{0,T}TK^3}} \left[I_1 \left(\ln(\sqrt{K/F_{0,T}}) \right) - I_0 \left(\ln(\sqrt{K/F_{0,T}}) \right) \right] dK < 0, \\
 &\text{Calls mit } K > F_{0,T} .
 \end{aligned}$$

Es handelt sich bei der Gleichung (39) damit um den anfänglichen Hedge eines neu aufgelegten Volatilitäts-Swaps. Zu einem Zeitpunkt $t > 0$ während der Laufzeit des Swaps setzt sich das Replikationsportfolio des Volatilitäts-Swaps zusammen aus

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{dK}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda \mathcal{V}_{0,t} \cdot T}}{K^2 \sqrt{\lambda}} (\theta_+(K/F_{t,T})^{p_+} + \theta_-(K/F_{t,T})^{p_-}) d\lambda$$

Call-Optionen für $K > F_{t,T}$ und Put-Optionen für $K < F_{t,T}$ sowie einem Geldbetrag in Höhe von

$$\sqrt{\mathcal{V}_{0,t}} .$$

Dem ATMF-Straddle $V_0(ST_T(F_{0,T}, T))$ kommt in Gleichung (39) wegen

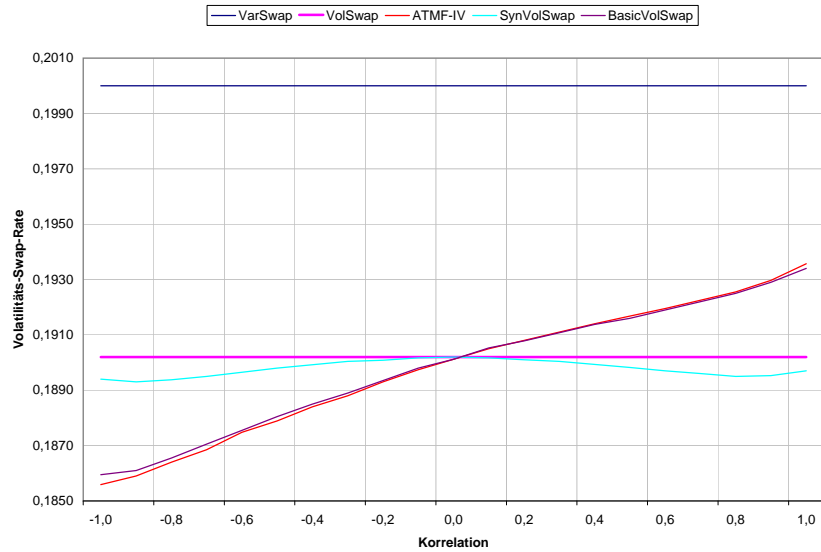
$$K_{0,T}^{vol} \approx w^{ST}(F_{0,T}) V_0(ST_T(F_{0,T}, T))$$

⁵⁵Vgl. CARR/LEE (2007), S. 7.

⁵⁶Hinzu kommt noch eine Position im Basiswert S_t und im Geldmarktfonds B_t (Delta-Hedge), die jedoch kostenneutral geführt werden kann und somit keinen Einfluss auf die Bestimmung der Swap-Rate im Zeitpunkt $t = 0$ hat.

die entscheidende Bedeutung zu. Die zusätzlichen OTM Call- und OTM Put-Optionen—die Call-Optionen werden dabei (leer-)verkauft, die Put-Optionen gekauft—dienen dazu, die Immunisierung gegenüber einer Korrelation ungleich von Null zu gewährleisten.

Abbildung 1: **Volatilitäts-Swap-Rate im Heston-Modell mit den Parametern** $\kappa = 1,15$, $v_\infty = 0,04$, $\vartheta = 0,39$, $v_0 = 0,04$ **und** $T = 0,5$.



Quelle: in Anlehnung an CARR/LEE (2009c), S. 24.

In Abbildung 1 sind die Ergebnisse dieses Abschnitts noch einmal visuell dargestellt. Ausgangspunkt ist die Annahme, dass die instantane Varianz $v_t = \sigma_t^2$ der aus HESTON (1993) bekannten Dynamik

$$dv_t = \kappa (v_\infty - v_t) dt + \vartheta \sqrt{v_t} dX_t^{\mathbb{P}}$$

folgt. Die konkreten Werte der Parameter κ , v_∞ , v_0 und ϑ beruhen auf den Schätzungen in BAKSHI/CAO/CHEN (1997). Der Abbildung ist zu entnehmen, inwiefern die zuvor genannten Größen in der Lage sind, die wahre Volatilitäts-Swap-Rate (diese liegt hier konkret bei einem Wert 0,1902) in Abhängigkeit der Korrelation ρ zu approximieren. Die korrelationsimmune Variante „SynVolSwap“ liefert eindeutig die besten Resultate. Die implizite ATMF-Volatilität („ATMF-IV“) und die Basisvariante („BasisVolSwap“) liefern nur dann sehr gute Werte, wenn die Korrelation zwischen Volatilitäts- und Renditeprozess des Basiswertes tatsächlich Null ist. Die Quadratwurzel der Varianz-Swap-Rate $\sqrt{K_{0,T}^{var}}$ stellt sich als eine nur sehr grobe

Approximation der Volatilitäts-Swap-Rate heraus, was allerdings auch nicht anders zu erwarten war.

Der arbitragefreie Wert eines Volatilitäts-Swaps unterscheidet sich trotz der Tatsache, dass es sich hierbei ebenfalls um den Wert eines geeignet zusammengesetzten Portfolios aus europäischen Plain-Vanilla-Optionen handelt, fundamental von der eines Varianz-Swaps. Dies ist in erster Linie der Fall, weil es bei einem Volatilitäts-Swap einer dynamischen Absicherungsstrategie bedarf. Es ist erforderlich, das (Options-)Portfolio nach Eröffnung der Position in jedem infinitesimal kleinen Zeitintervall entsprechend anzupassen. Auf Tagesbasis betrachtet bedeutet dies, dass es die Optionsposition jeden Tag durch den Kauf beziehungsweise Verkauf von Call- und Put-Optionen zu adjustieren gilt, sofern eine ausreichend enge Spanne an Basispreisen verfügbar ist, die diese Vorgehensweise erlaubt. An dieser Stelle offenbart sich eine Schwachstelle dieses Ansatzes. Die Transaktionskosten (Bid/Ask-Spread), die bei einer solchen Handelsstrategie, insbesondere im Falle von Optionsmärkten mit nur geringer Liquidität, anfallen, können die Relevanz dieses Ansatz mitunter einschränken. Nichtsdestotrotz kann die Erkenntnis, dass auch die Bewertung von Volatilitäts-Swaps, ohne die explizite Modellierung des zukünftigen Volatilitätsprozesses, als bahnbrechend bezeichnet werden. Man darf gespannt sein, ob der Markt für Volatilitäts-Swaps in Zukunft davon profitieren kann.

4 Zur Handelbarkeit der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG

4.1 Vorbemerkungen

Wie bereits angemerkt, waren Delta-neutrale Optionspositionen bis vor einigen Jahren die gängige Herangehensweise um auf Änderungen des Volatilitätsniveaus zu spekulieren. Es folgten Volatilitätsderivate wie der Varianz- und Volatilitäts-Swap. Die Möglichkeit Volatilität beziehungsweise Varianz mit Hilfe Delta-neutraler Optionspositionen oder dem Einsatz von Swap-Kontrakten zu handeln, stellt für den Privatanleger allerdings keine Alternative dar. Abgesehen davon, dass der Privatanleger keinen Zugang zu diesem Markt hat, ist er daran interessiert, eine möglichst transparente und nachvollziehbare Anlagestrategie zu tätigen. Als ein bewährtes Produktkonzept, welches genau diesen Ansprüchen gerecht wird, haben sich in den letzten Jahren Indexzertifikate am Retailmarkt für strukturierte Anlageprodukte in Deutschland fest etabliert. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie die Entwicklung des zugrunde liegenden Basiswertes (dem Index) stets eins zu eins nachvollziehen. Der Preis des Zertifikats entspricht daher zu jedem Zeitpunkt gerade dem aktuellen Indexstand beziehungsweise dem um das Bezugsverhältnis angepassten Indexstand. Das Spektrum der zugrunde liegenden Basiswerte erstreckt sich mittlerweile auf nahezu sämtliche Aktienindizes rund um den Globus, so dass dem Anleger hinsichtlich einer geografisch diversifizierten Anlagestrategie keine Grenzen gesetzt sind. Der Anleger ist jedoch auch daran interessiert, durch die Aufnahme weiterer Anlageklassen in sein Portfolio, in Krisenzeiten, die sich durch rückläufige Aktienkursbewegungen auszeichnen, ebenfalls Kursverluste zu vermeiden. Da sich die Volatilität der Aktienmärkte meist entgegen dem Trend der Kursnotierungen entwickelt, schien es aus Diversifikationsgesichtspunkten nahe liegend, die Volatilität als eigenständige Anlageklasse auch für Privatanleger zugänglich zu machen. Um hier eine transparente und für den Anleger intuitiv nachvollziehbare Anlagemöglichkeit anzubieten, entschlossen sich die Emittenten für die Auflegung von Indexzertifikaten auf Volatilitätsindizes. Die für den DAX relevanten Volatilitätsindizes sind VDAX und VDAX-New, welche sich hinsichtlich ihrer Berechnungsgrundlage voneinander unterscheiden. Der 2005 aufgelegte VDAX-New-Index der Deutsche Börse AG wurde in

erster Linie eingeführt, um eine verbesserte Handelbarkeit zu erreichen,⁵⁷ was lange Zeit eine entscheidende Schwachstelle des schon seit 1994 eingeführten VDAX-Index war. Inwieweit sich allerdings tatsächlich die Möglichkeit einer, im Vergleich zum älteren VDAX, einfacheren Indexreplikation ergibt, scheint fraglich, wenn man einen Blick hinter die Kulissen beider Indexkalkulationen wirft.

In diesem Kapitel wird daher der Versuch unternommen, aufzuzeigen, inwiefern es durch die Auflegung des VDAX-New-Index tatsächlich zu einer Verbesserung der Handelbarkeit, der dem Index zugrunde liegenden impliziten Volatilität beziehungsweise genauer der Quadratwurzel der impliziten Varianz, kommt. Die Deutsche Börse AG begründet die Einführung des VDAX-New-Index damit, dass dieser „[...] große Vorteile bietet, wenn es um die Schaffung, den Handel und die Absicherung von derivativen Produkten auf diesen Index geht.“⁵⁸ Um die Vorteilhaftigkeit, im Vergleich zum alten Modell des VDAX zu analysieren, ist es notwendig, näher auf die unmittelbare Verbindung der zuvor diskutierten Volatilitätsderivate mit den Volatilitätsindizes einzugehen. Des Weiteren wird auf die mit der Auflegung von Indexzertifikaten auf den VDAX-New verbundenen besonderen Eigenschaften eingegangen, die vielfach von Anlegern nicht gründlich genug recherchiert worden sind und entsprechend für Ernüchterung gesorgt haben. Hierbei geht es insbesondere um die bei endlos laufenden Zertifikaten anfallenden Rollkosten, die aus der Prolognation der vom Emittenten zur Absicherung eingesetzten (synthetischen) Forwardbeziehungsweise Futures-Kontrakte resultieren. Im Vergleich zu den Arbeiten von SCHMIDT/THOMAS (2005) und SCHMIDT/THOMAS (2006), die sich ebenfalls mit Volatilitätsindizes und deren Handelbarkeit befassen, soll in diesem Beitrag die Thematik tiefergehend analysiert werden.

Die Analyse gliedert sich in drei Stufen. Im folgenden Abschnitt werden die den beiden Indizes zugrunde liegenden Finanzinstrumente dargestellt. Es handelt sich hierbei um den Volatilitäts- und den Varianz-Swap. Auf Grundlage dieser Erkenntnisse wird dann im nächsten Abschnitt untersucht, inwiefern die Indexkonzepte des VDAX und VDAX-New eine angemessene Replikation erlauben und insbesondere darauf eingegangen, ob durch die Einführung des VDAX-New eine verbesserte Han-

⁵⁷Ob es sich bei der dem VDAX-New zugrunde liegenden Handelsstrategie um eine dynamische oder statische Handelsstrategie handelt, wird von den Indexbetreibern nicht angeführt. Diese noch offene Frage soll im weiteren Verlauf dieses Kapitels geklärt werden.

⁵⁸DEUTSCHE BÖRSE (2007), S. 4.

delbarkeit im Vergleich zum Vorgängermodell erreicht werden konnte. Abschließend werden die wichtigsten Erkenntnisse dieses Kapitels noch einmal zusammengefasst.

4.2 Volatilitätsderivate als Berechnungsgrundlage der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New

4.2.1 Der Volatilitäts-Swap als Berechnungsgrundlage des VDAX-Index

Der VDAX gilt als Schätzer beziehungsweise laufzeitgewichtete durchschnittliche Schätzung der impliziten ATMF-Volatilität über den Zeitraum der nächsten 45 Tage.⁵⁹ Diese Erkenntnis wurde erstmals von CARR/LEE (2005) in einem Modellrahmen, der über das BSM-Modell hinausgeht auch ökonomisch begründet und somit erst lange Zeit nachdem der VDAX-Index der Deutsche Börse AG eingeführt wurde. Die entscheidenden Annahmen, die diesem Ergebnis zugrunde liegen sind, dass der Kursprozess des Basiswertes S_t einem stetigen Prozess folgt, der Volatilitäts- und der Kursprozess unabhängig voneinander sind und die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes.⁶⁰ Sie zeigen dann, dass die implizite ATMF-Volatilität (approximativ) dem Erwartungswert der zukünftigen Volatilität unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} entspricht:

$$\sigma_{0,T}^{I-ATMF} \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_T} | \mathcal{F}_0 \right] \quad (40)$$

Die Bestimmung einer Handelsstrategie, welche die zukünftige Volatilität repliziert, ist aus diesen Erkenntnissen jedoch erst möglich, wenn wir aufgrund der Beziehung

$$K_{0,T}^{vol} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_T} | \mathcal{F}_0 \right]$$

zur Bestimmung der arbitragefreien Volatilitäts-Swap-Rate zum Zeitpunkt $t = 0$, auf die Ergebnisse des Abschnitts 3.4 zurückgreifen. Die Annahme bezüglich der Korrelation des Volatilitäts- und des Kursprozess des Basiswertes mag auf den ersten

⁵⁹Empirische Arbeiten belegen, dass es sich bei der impliziten ATMF-Volatilität um einen guten, wenn auch verzerrten, Prognosewert der zukünftigen Volatilität handelt. Vgl. dazu Kapitel 5 oder auch DAY/LEWIS (1988), FLEMING (1998).

⁶⁰Eine Korrelation von Null zwischen dem Prozess des Basiswert und der Volatilität beziehungsweise Varianz impliziert einen symmetrischen Volatilitäts-Skew. Ein asymmetrischer Skew-Verlauf kann nur durch eine Korrelation, die ungleich von Null ist abgebildet werden.

Blick sehr restriktiv erscheinen, für kurze Laufzeiten (wie beispielsweise 45 Tage) liefert die Beziehung (40) jedoch auch bei einer Korrelation ungleich von Null sehr zufriedenstellende Resultate.

Nach einer Diskretisierung von Gleichung (39) ist die Volatilitäts-Swap-Rate approximativ gegeben durch

$$K_{0,T}^{vol} \approx w^{ST}(F_{0,T})V_0(ST_T(F_{0,T}, T)) + \sum_j w^P(K_j)V_0(P(K_j, T)) + \sum_j w^C(K_j)V_0(C(K_j, T)) . \quad (41)$$

Die Diskretisierung bringt mit sich, dass sich das Optionsportfolio nur noch aus endlich vielen Optionen zusammensetzt. Wir bezeichnen daher K^P als den höchsten Basispreis der erworbenen Put-Optionen sowie K^C als den niedrigsten Basispreis der verkauften Call-Optionen, wobei $K^C \equiv K^P + \Delta K_j^P$ gelte. Die Stückzahlen bestimmen sich dann konkret durch⁶¹

$$\begin{aligned} w^{ST}(F_{0,T}) &\equiv \frac{\sqrt{\pi/2}}{F_{0,T}\sqrt{T}}, \text{ Straddles mit } K = F_{0,T} \\ w^P(K_j) &\equiv \frac{1}{F_{0,T}^2\sqrt{T}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-3m_j/2} [I_0(m_j/2) - I_1(m_j/2)] \Delta K_j, \\ &\quad \text{Puts mit } K_j \leq K^P, K_j \neq K^* \\ w^C(K_j) &\equiv \frac{1}{F_{0,T}^2\sqrt{T}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-3m_j/2} [I_1(m_j/2) - I_0(m_j/2)] \Delta K_j, \\ &\quad \text{Calls mit } K_j \geq K^C, K_j \neq K^*, \end{aligned}$$

wobei I_n die modifizierte Bessel-Funktion erster Art der Ordnung n bezeichnet, $m_j \equiv \ln(K_j/F_{0,T})$, $K^* \equiv (K^P + K^C)/2$ und $\Delta K_j \equiv K_{j+1} - K_j$. Für den Basispreis K^* , welcher dem Forward beziehungsweise Futures $F_{0,T}$ am nächsten kommt, bestimmt sich die Stückzahl der zu erwerbenden Call-Optionen mit Basispreis K^* für $K^* \geq K^C$

⁶¹Vgl. CARR/LEE (2007), S. 19. Hinzu kommt noch eine Position im Basiswert S_t und im Geldmarktfonds B_t (Delta-Hedge), die jedoch kostenneutral geführt werden kann und somit keinen Einfluss auf die Bestimmung der Swap-Rate im Zeitpunkt $t = 0$ hat.

beziehungsweise Put-Optionen mit Basispreis K^* für $K^* \leq K^P$ gemäß:⁶²

$$\frac{1}{F_T \sqrt{T}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-m_*^+/2} I_0(m_*^+/2) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-m_*^-/2} I_0(m_*^-/2) - \sqrt{2\pi} \right) \quad (42)$$

mit $m_*^\pm \equiv \ln((K^* \pm \Delta K_j/2)/F_{0,T})$. Der VDAX-Indexstand entspricht damit (approximativ) der Swap-Rate eines Volatilitäts-Swaps—also letztlich ein spezifisch zusammengesetztes Optionsportfolio—mit einer Restlaufzeit von 45 Tagen.

4.2.2 Der Varianz-Swap als Berechnungsgrundlage des VDAX-New-Index

In Abschnitt 3.3 wurde dargelegt, dass die arbitragefreie Varianz-Swap-Rate $K_{0,T}^{var}$ gegeben ist durch den Ausdruck

$$K_{0,T}^{var} = \frac{2}{T} \cdot \left[rT - \left(\frac{S_0 \cdot B_{0,T}}{S^*} - 1 \right) - \ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right) + B_{0,T} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} V_0(P(T, K)) dK + B_{0,T} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} V_0(C(T, K)) dK \right]. \quad (43)$$

Die Gleichung (43) bildet den Ausgangspunkt der Berechnungsformel des VDAX-New-Index. Es gilt im Folgenden nun aufzuzeigen, wie diese Gleichung in Gleichung (12) überführt werden kann.

Betrachten wir zunächst nur die ersten drei Terme ohne das Optionsportfolio. Unter Verwendung des Forward-Preises $F_{0,T} = S_0 \cdot B_{0,T}$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{2}{T} \cdot \left[\ln \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} \right) - \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right) \right]. \quad (44)$$

Mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung von $\ln(1+x)$ ergibt sich hierfür der Ausdruck⁶³

$$\ln \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} \right) = \ln \left(1 + \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right) \right) \approx \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right)^2.$$

Setzt man nun diese Approximation in Gleichung (44) ein und ersetzt zuletzt noch S^* durch K_0 , den ATMF-Basispreis, welcher die Grenze zwischen den Call- und

⁶²Vgl. CARR/LEE (2007), S. 19 ff. Für den Fall, dass F_T genau mittig zwischen den Basispreisen K^P und K^C liegt, sei $K^* = (K^P + K^C)/2$, so dass Gleichung (42) irrelevant wird.

⁶³Vgl. LYONS (2005), S. 77.

Put-Optionen im Portfolio bildet, dann führt dies auf

$$\frac{2}{T} \cdot \left[\left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right)^2 - \left(\frac{F_{0,T}}{S^*} - 1 \right) \right] \approx -\frac{1}{T} \left(\frac{F_{0,T}}{K_0} - 1 \right)^2.$$

Als nächstes betrachten wir die Diskretisierung des Optionsportfolio in Gleichung (43). Dies führt auf den Ausdruck

$$e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} V_0(P(T, K)) dK + e^{rT} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} V_0(C(T, K)) dK \approx e^{rT} \sum_j \frac{\Delta K_j}{K_j^2} \cdot M(K_j),$$

wobei zu beachten ist, dass immer nur ein OTM-Call oder ein OTM-Put je Basispreis j in Form von $M(K_j)$ in die Summe eingehen kann. Folglich ergibt sich, wenn alle Terme zusammengefasst werden:⁶⁴

$$K_{0,T}^{var} \approx \frac{2}{T} \cdot \sum_j \frac{\Delta K_j}{K_j^2} \cdot e^{rT} \cdot M(K_j) - \frac{1}{T} \left(\frac{F_{0,T}}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (45)$$

Dieser Ausdruck für die diskrete Varianz-Swap-Rate $K_{0,T}^{var}$ bildet damit die Grundlage für die Berechnung der Varianzen v_{0,T_i}^2 der $i = 1, \dots, 8$ VDAX-NEW-Subindizes der Deutsche Börse AG.

4.3 Handelbarkeit von Volatilitätsindizes

In diesem Abschnitt soll aufgezeigt werden, inwiefern es möglich ist, eine Replikation der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New durchzuführen beziehungsweise ob durch die Einführung des VDAX-New tatsächlich das Ziel einer verbesserten Handelbarkeit im Vergleich zum seinem Vorgänger, dem VDAX, erreicht werden konnte.

⁶⁴JIANG/TIAN (2007) untersuchen die Fehler, die mit dieser Approximation der Varianz-Swap-Rate einhergehen. Hierbei geht es zum einen um den Fehler, der dadurch entsteht, dass in der Praxis nur eine begrenzte Spanne von Basispreisen $K_j \in [K^{\min}, K^{\max}]$ verfügbar ist („truncation error“), und zum anderen um den Fehler, der dadurch auftritt, dass der Abstand ΔK_j zwischen den Basispreisen nicht beliebig klein gewählt werden kann („discretization error“). Die Autoren zeigen, dass der erstgenannte Fehler den zweitgenannten Fehler dominiert und es daher von besonderer Wichtigkeit ist, eine ausreichend breite Spanne von Basispreisen für die Berechnung von Gleichung (45) heranzuziehen, da es ansonsten tendenziell zu einer Unterschätzung der Varianz-Swap-Rate kommt. Die Breite der Spanne richtet sich dabei nach der Volatilität des Basiswertes S_t . Je höher die Volatilität ist, desto breiter ist die Spanne der zu erwerbenden Basispreise zu wählen.

4.3.1 Replikation auf Spot-Basis

Betrachtet wird im Folgenden nun die Handelbarkeit der Sub- und Hauptindizes des VDAX und insbesondere des VDAX-New. Dieser wird schließlich damit beworben eine bessere Handelbarkeit der Anlageklasse Volatilität zu gewährleisten. Wie bereits in Abschnitt 3.3 dargelegt wurde, gilt der VDAX als Schätzer beziehungsweise laufzeitgewichtete durchschnittliche Schätzung der impliziten BSM-ATMF-Volatilität über den Zeitraum der nächsten 45 Tage. Der VDAX kann demnach als eine Approximation der Volatilitäts-Swap-Rate eines Volatilitäts-Swaps mit einer Laufzeit von 45 Tagen beziehungsweise bei den Subindizes entsprechend der Laufzeiten von 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 und 24 Monaten aufgefasst werden:

$$\begin{aligned} \text{VDAX}_{0,\tilde{T}} &\approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,\tilde{T}}} | \mathcal{F}_0 \right] = K_{0,\tilde{T}}^{vol} \quad \text{beziehungsweise} \\ \text{VDAX}_{0,T_i} &\approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T_i}} | \mathcal{F}_0 \right] = K_{0,T_i}^{vol} \quad \text{für } i = 1, \dots, 8. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass eine Replikation des VDAX, mit Hilfe des Einsatzes von Volatilitäts-Swaps, d.h. durch den dynamischen Handel in einer spezifisch zusammengesetzten Optionsposition, näherungsweise gut möglich ist. Ein Subindex $i = 1, \dots, 8$ mit einer entsprechenden Laufzeit von 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 oder 24 Monaten, kann dann durch eine Position in einem Volatilitäts-Swap mit entsprechender Laufzeit nachgebildet werden. Bei der Replikation des laufzeitunabhängigen VDAX-Hauptindex gilt es zu beachten, dass, wie bereits dargelegt wurde, eine täglich anzupassende laufzeitgewichtete Position in zwei Volatilitäts-Swaps, welche die Laufzeit von 45 Tagen umschließen, einzunehmen ist. Die Replikation der Subindizes ist mit etwas weniger Aufwand verbunden, da in diesem Falle eine Anpassung des Replikationsportfolios nur dann erforderlich ist, wenn sich der Basiswert vom ATMF-Punkt entfernt. Allerdings wird es in der Regel erforderlich sein, das Replikationsportfolio täglich anzupassen, um eine Position am Geld zu halten, da diese den entscheidenden Beitrag zu einer konformen Replikation eines VDAX Subindizes beziehungsweise der arbitragefreien Volatilitäts-Swap-Rate leistet. Die bereits erwähnte Problematik anfallender Transaktionen kann im Falle des dem VDAX zugrunde liegenden DAX-Index etwas entschärft werden, da dieser über einen sehr liquiden Optionsmarkt, gerade im relevanten ATMF-Bereich, verfügt.

Bei dem Indexstand eines VDAX-New-Subindex beziehungsweise des laufzeitunabhängigen Hauptindex, handelt es sich um die Quadratwurzel der Varianz-Swap-Rate eines mit einer entsprechenden Laufzeit ausgestatteten Varianz-Swap-Kontrakts:⁶⁵

$$\text{VDAX-New}_{0,T} = \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{0,T}|\mathcal{F}_0]}$$

Der quadrierte VDAX-New gilt daher als Approximation der, unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} erwarteten, durchschnittlichen quadratischen Variation über einen Zeitraum der nächsten 30 Tage beziehungsweise bei Betrachtung der Subindex der kommenden 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 und 24 Monate:

$$\begin{aligned} \text{VDAX-New}_{0,\tilde{T}}^2 &\approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{0,\tilde{T}}|\mathcal{F}_0] = K_{0,\tilde{T}}^{var} && \text{beziehungsweise} \\ \text{VDAX-New}_{0,T_i}^2 &\approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{0,T_i}|\mathcal{F}_0] = K_{0,T_i}^{var} && \text{für } i = 1, \dots, 8. \end{aligned}$$

An dieser Stelle wird nun unmittelbar ersichtlich, dass eine Replikation des VDAX-New respektive seiner Subindizes mittels einer statischen Buy-and-hold Strategie auf Basis von Varianz-Swap-Kontrakten—beziehungsweise der diesen zugrunde liegenden semi-statischen Handelsstrategie auf Basis von Log-Kontrakten und dem kontinuierlichen Delta-Hedging derselben—ausscheidet. Ursächlich hierfür ist, dass es sich beim VDAX-New eben nicht um die Varianz-Swap-Rate $K_{0,T}^{var}$, sondern um deren Quadratwurzel handelt, was eher auf eine dynamische Handelsstrategie mit dem Varianz-Swap als zugrunde liegendem Basiswert hindeutet. Bevor dieser Aspekt näher beleuchtet werden soll, gilt es zunächst noch einen Blick auf den Versuch der Replikation des VDAX-New respektive seiner Subindizes mit Hilfe von Volatilitäts-Swaps zu werfen.

4.3.1.1 Replikation mit Volatilitäts-Swaps Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, inwiefern es möglich ist, mit dem Einsatz von Volatilitäts-Swaps den VDAX-New zu replizieren und welche Faktoren sich besonders auf die Tauglichkeit dieses Ansatz auswirken. Hierbei kann es sich allerdings bestenfalls um eine näherungsweise Replikation handeln, soviel sei vorweggenommen. Im vorderen Teil

⁶⁵Das heißt, es wird die in Volatilitätspunkten angegebene variance swap rate $K_{0,T}^{var}$ quadriert.

der Arbeit wurde bereits dargelegt, dass der VDAX näherungsweise mit der Swap-Rate eines Volatilitäts-Swap einer entsprechenden Laufzeit übereinstimmt. Verwendet man einen auf Volatilitäts-Swaps basierenden Replikationsansatz, zieht man somit den VDAX als einen Schätzer für den VDAX-New heran und geht folglich implizit von der Bedingung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right] \approx \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T} | \mathcal{F}_0]} \Leftrightarrow K_{0,T}^{vol} \approx \sqrt{K_{0,T}^{var}} \quad (46)$$

aus. Unter Berücksichtigung der JENSEN'schen Ungleichung für Erwartungswerte gilt es allerdings zu beachten, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} | \mathcal{F}_0 \right] \leq \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T} | \mathcal{F}_0]} \Leftrightarrow K_{0,T}^{vol} \leq \sqrt{K_{0,T}^{var}} \quad (47)$$

gelten muss. Die Differenz zwischen Volatilitäts-Swap-Rate und der in Volatilitäts-Punkten angegebenen Varianz-Swap-Rate wird als *Konvexitätsfehler* bezeichnet. Mit einer Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x = \mathcal{V}_{0,T}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}] \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T} | \mathcal{F}_0]$, kann gezeigt werden, dass das Ausmaß des Konvexitätsfehlers abhängig ist von der Varianz der Varianz unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} :

$$\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} \approx \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]} + \frac{\mathcal{V}_{0,T} - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]}{2\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]}} - \frac{(\mathcal{V}_{0,T} - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}])^2}{8\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]^{3/2}} \quad (48)$$

beziehungsweise nach bilden des Erwartungswertes⁶⁶

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}} \right] &\approx \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]} + 0 - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(\mathcal{V}_{0,T} - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}])^2]}{8\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]^{3/2}} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]} - \frac{\mathbb{V}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]}{8\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{0,T}]^{3/2}} \quad . \end{aligned} \quad (49)$$

Eine Replikation auf Basis von Volatilitäts-Swaps (lineare Approximation) ist demnach nur dann zulässig, wenn man davon ausgeht, dass die zukünftige Volatilität eine konstante beziehungsweise deterministische Größe ist und die Volatilität der Volatilität den Wert Null annimmt. Da diese Annahme jedoch nicht haltbar ist, gilt es im Folgenden den Konvexitätsfehler, welcher aus der quadratischen Approximati-

⁶⁶Vgl. BROCKHAUS et. al (1999), S. 130.

on verursacht wird, genauer zu quantifizieren. Hierfür ist es erforderlich, ein Modell für die Dynamik der zukünftigen Volatilität beziehungsweise Varianz heranzuziehen. Unter Verwendung des stochastischen Volatilitätsmodells von HESTON (1993), in dem der Basiswert S_t dem Diffusionsprozess

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

und die Momentan-Varianz $v_t = \sigma_t^2$, mit

$$\mathcal{V}_{0,T} = \frac{1}{T} \int_0^T v_u du,$$

dem Wurzeldiffusionsprozess (CIR-Prozess)

$$dv_t = \kappa (v_{\infty} - v_t) dt + \vartheta \sqrt{v_t} dX_t^{\mathbb{P}}$$

folgt, soll im Folgenden die Varianz der zukünftigen Volatilität beziehungsweise Varianz berechnet werden.⁶⁷ Hierbei bezeichnet κ den *mean reversion speed*, v_{∞} die Langzeit-Varianz (*mean reversion level* beziehungsweise *long volatility*), v_0 die sogenannte *short volatility* und ϑ die Volatilität der Volatilität beziehungsweise Varianz. Die Varianz der zukünftigen Volatilität beziehungsweise Varianz bestimmt sich dann wie folgt:⁶⁸

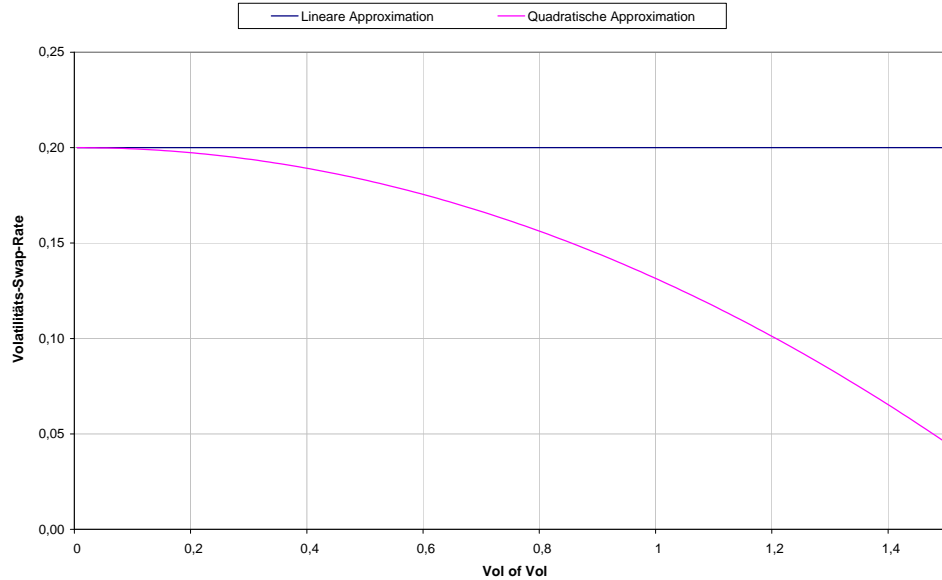
$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{0,T}] &= \vartheta^2 \cdot \frac{e^{-2\kappa T}}{2\kappa^3 T^2} \left[2(-1 + e^{2\kappa T} - 2e^{\kappa T} \kappa T)(v_0 - v_{\infty}) \right. \\ &\quad \left. + (-1 + 4e^{\kappa T} - 3e^{2\kappa T} + 2e^{2\kappa T} \kappa T)v_{\infty} \right]. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\partial \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{0,T}]}{\partial \vartheta} > 0$ nimmt das Ausmaß des Konvexitätsfehlers beziehungsweise die Differenz zwischen der Volatilitäts-Swap-Rate $K_{0,T}^{vol}$ und der in Volatilitätspunkten angegebenen Varianz-Swap-Rate $\sqrt{K_{0,T}^{var}}$ mit zunehmender Volatilität der Momentan-Varianz zu (vgl. Abbildung 2). Eine Replikation des VDAX-New auf Basis von Volatilitäts-Swaps wird demnach mit ansteigender Volatilität der Momentan-Varianz zunehmend ungenauer. Die Abbildung 3 verdeutlicht den Fehler, der mit

⁶⁷Die Wiener Prozesse $W_t^{\mathbb{P}}$ und $X_t^{\mathbb{P}}$ weisen dabei eine (konstante) Korrelation gemäß $dW_t^{\mathbb{P}} dX_t^{\mathbb{P}} = \rho dt$ auf.

⁶⁸Vgl. BROCKHAUS et. al (1999), S. 132.

Abbildung 2: **Ausmaß des Konvexitätsfehlers im Heston-Modell mit den Parametern $\kappa = 1, 15$, $v_\infty = 0, 04$, $v_0 = 0, 04$ und $T = 0, 5$.**

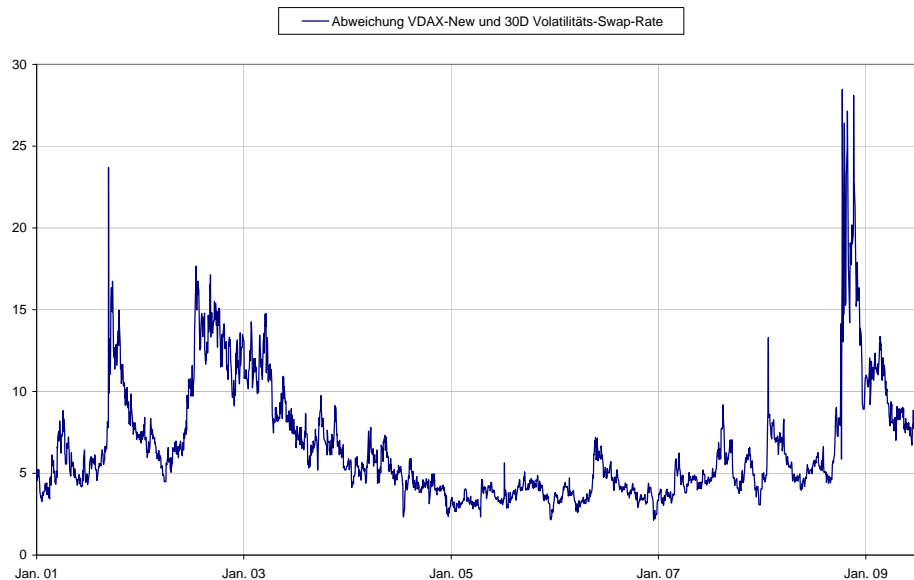


Quelle: in Anlehnung an BROCKHAUS et. al (1999), S. 132.

einer Approximation des VDAX-New durch den VDAX, d.h. der Approximation der in Volatilitätspunkten angegebenen Varianz-Swap-Rate $\sqrt{K_{0,T}^{var}} = \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{0,T}]}$ durch die Volatilitäts-Swap-Rate $K_{0,T}^{vol} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sqrt{\mathcal{V}_{0,T}}]$, auf Basis realer Daten einhergeht. Der VDAX-New notierte in dem der Abbildung 3 zugrunde liegenden Betrachtungszeitraum im Durchschnitt etwa 6,61 Volatilitätspunkte über dem Volatilitäts-Swap-Rate, was auf einen sehr ausgeprägten Konvexitätsfehler schließen lässt. Es bleibt somit festzuhalten, dass eine Replikation (Approximation) des VDAX-New mit Hilfe von Volatilitäts-Swaps, aufgrund des Ausmaßes des beobachteten Konvexitätsfehlers, nicht empfehlenswert ist.

4.3.1.2 Replikation mit Varianz-Swaps Die Duplizierung des VDAX-New verlangt vielmehr eine dynamische Handelsstrategie, bei welcher der Varianz-Swap als zugrunde liegender Basiswert fungiert. Analog dem Gedanken von BSM, durch die Verwendung von Basiswertpapieren (Aktie, Zerobond) und deren zukünftiger Kursmodellierung komplexere Produkte wie Options-Kontrakte bewerten zu können, scheint es naheliegend die Idee zu verfolgen, durch die Verwendung von Varianz-Swap-Preisen und entsprechenden Varianz-Swap-Marktmodellen komplexere Produkte zu betrachten, welchen der Varianz-Swap zugrunde liegt, und deren arbitragefreien Wert es zu bestimmen gilt. Primäres Ziel muss es daher sein, eine geeigne-

Abbildung 3: **Abweichung des VDAX-New und der 30D-Volatilitäts-Swap-Rate.**



Quelle: Bloomberg L.P.

te Modellierung der Varianzstruktur von Varianz-Swaps vorzunehmen und letztere dann als Hedging-Instrument zu verwenden. Hierbei werden insbesondere Parallelen zu den No-Arbitrage-Modellen aus der Zinsstrukturtheorie deutlich. BÜHLER (2006) verfolgt einen Ansatz, welcher stark angelehnt an das Zinsstrukturmodell von HEATH/JARROW/MORTON (HJM) aus dem Jahr 1990 ist. Wobei die Laufzeitstruktur von Varianz-Swap-Preisen (bei Annahme eines liquiden und friktionslosen Varianz-Swap Marktes für sämtliche Fälligkeiten) hierbei der gleichen Rolle wie die Laufzeitstruktur von Zerobonds-Preisen im Modell von HJM zukommt. Gegeben die heutigen Varianz-Swap-Preise $V_0(\text{Var}_T)$ für alle Fälligkeiten $T \in [0, \infty)$, geht es um die gemeinsame Modellierung der Preisprozesse $V(\text{Var}_T) = (V_t(\text{Var}_T))_{t \in [0, \infty)}$ und $(S_t)_{t \in [0, \infty)}$, so dass auf dem verbundenen Markt keinerlei Arbitragegelegenheiten existieren. Ziel dieses Ansatzes ist es, nicht ein Modell zur Bewertung von Varianz-Swaps zu entwickeln, sondern, gegeben die Preise aller Varianz-Swaps, Informationen aus diesen über die zeitliche Struktur der zukünftigen Varianz zu gewinnen. BÜHLER verwendet den Ansatz, um, aufbauend auf klassischen Varianz-Swaps, die Bewertung beziehungsweise das Hedging komplexerer Auszahlungsstrukturen wie Optionen auf Varianz/Volatilität und weiterer sehr volatilitätssensitiver Optionen (Forward-Start-Optionen, bestimmter Cliquet-Optionen etc.) vorzunehmen. Dieser Ansatz bildet

daher einen interessanten Ansatzpunkt für die Bestimmung einer Replikationsstrategie des VDAX-New auf Basis einer Handelsstrategie in Varianz-Swaps, dem es sich lohnt weiter nachzugehen.

4.3.2 Replikation auf Futures-Basis

Eine weitere Möglichkeit der Replikation des VDAX-New, die in der Literatur des öfteren anzutreffen ist, bietet sich grundsätzlich durch den Einsatz von Futures-Kontrakten auf den VDAX-New.⁶⁹ Es folgt jedoch Ernüchterung mit Blick auf das an der EUREX vorherrschende Handelsvolumen in diesen Kontrakten.⁷⁰ Ein Handel findet hier schlicht nicht statt. Dies mag auch mit der im vorherigen Abschnitt erläuterten (derzeit noch) fehlenden Handelbarkeit des VDAX-New zusammenhängen. Da es sich bei dem VDAX-New um kein handelbares Wertpapier handelt, ist eine statische Bewertung beziehungsweise Replikation der VDAX-New Futures-Kontrakte unter Verwendung des VDAX-New und einer risikolosen Geldanlage nicht durchführbar. Das heißt, es ist nicht möglich, eine klassische *cost-of-carry* Beziehung aufzustellen:

$$F_{T_0, T_i}^{VDAX-New} \neq \text{VDAX-NEW}_{T_0, \tilde{T}} \cdot e^{rT_i}, \quad T_i \geq \tilde{T}$$

CARR/WU (2006) zeigen, dass sich unter Annahme der Arbitragefreiheit und kontinuierlichen Handels (i.e. der VDAX-New Futures erfüllt die Martingaleigenschaft unter dem Maß \mathbb{Q}) Ober- und Untergrenzen für den Wert des VDAX-New Futures angeben lassen. Der Wert des Futures $F_{T_0, T_i}^{VDAX-New}$ entspricht hierbei dem Wert des Anspruchs auf den in $t = T_i$ dann aktuellen Indexstand $\text{VDAX-New}_{T_i, T_j} = \sqrt{K_{T_i, T_j}^{var}}, T_j \geq T_i$ im Betrachtungszeitpunkt $t = T_0$, i.e.

$$F_{T_0, T_i}^{VDAX-New} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{VDAX-New}_{T_i, T_j} | \mathcal{F}_{T_0}] . \quad (50)$$

⁶⁹Aktuell bietet die EUREX Futures-Kontrakte auf insgesamt drei Volatilitätsindizes an. Neben dem VDAX-New werden Produkte auf den VSMI sowie den VSTOXX angeboten. Stand: November 2009.

⁷⁰Die Anzahl gehandelter Kontrakte als auch der Open Interest in VDAX-New Futures-Kontrakten belief sich am 26.02.2009 in sämtlichen Fälligkeiten auf 0 Kontrakte. Quelle: http://www.eurexchange.com/trading/products/VOL/FVDX_de.html?mode=quotes

Es handelt sich demnach um die Quadratwurzel der im Betrachtungszeitpunkt $t = T_0$ erwarteten zukünftigen Varianz des Zeitraums $[T_i, T_j]$ mit

$$\text{VDAX-New}_{T_i, T_j} = \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{T_j - T_i} \int_{T_i}^{T_j} \sigma_u^2 du \middle| \mathcal{F}_{T_i} \right]}. \quad (51)$$

Einsetzen von (51) in (50) führt dann auf

$$F_{T_0, T_i}^{\text{VDAX-New}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{T_j - T_i} \int_{T_i}^{T_j} \sigma_u^2 du \middle| \mathcal{F}_{T_i} \right]} \middle| \mathcal{F}_{T_0} \right]. \quad (52)$$

Berücksichtigt man die Konkavität der Wurfelfunktion und die JENSEN'sche Ungleichung, ergeben sich die folgenden Wertober- und -untergrenzen für den VDAX-New Futures:⁷¹

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{T_i, T_j} \middle| \mathcal{F}_{T_0}} \right] \leq F_{T_0, T_i}^{\text{VDAX-New}} \leq \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{V}_{T_i, T_j} \middle| \mathcal{F}_{T_0} \right]}$$

beziehungsweise

$$K_{T_i, T_j}^{\text{vol}} \leq F_{T_0, T_i}^{\text{VDAX-New}} \leq \sqrt{K_{T_i, T_j}^{\text{var}}}. \quad (53)$$

Hierbei bezeichnet $K_{T_i, T_j}^{\text{vol}}$ die Forward Volatilitäts-Swap-Rate und $K_{T_i, T_j}^{\text{var}}$ die Forward Varianz-Swap-Rate des entsprechenden Swap-Kontrakts.⁷² Obwohl es möglich ist, theoretisch obere und untere Bewertungsgrenzen anzugeben, bleibt die Problematik der Identifizierung einer geeigneten, den Basiswertes replizierenden, Handelsstrategie bestehen. Lediglich die Untergrenze kann approximativ durch Forward-Start ATMF-Optionen (Straddles) nachgebildet werden. Bei der Obergrenze handelt es sich um die Quadratwurzel der forward-starting Varianz-Swap-Rate, wodurch sich aufgrund des Konvexitätsfehlers die gleiche Problematik wie im Falle der Replikation des VDAX-New-Index einstellt. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass es durchaus möglich ist, Wertgrenzen für den arbitragefreien Preis eines VDAX-New Futures Kontrakts beziehungsweise des VDAX-New Spot-Index

⁷¹Vgl. CARR/WU (2006a), S. 24 ff.

⁷²Bei einem Forward Varianz- beziehungsweise Volatilitäts-Swap handelt es sich um einen Kontrakt, der in $t = T_0$ abgeschlossen wird und zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T_i > T_0$ ein Varianz- beziehungsweise Volatilitäts-Swap mit einer Fälligkeit T_j wird. Es wird somit auf die Varianz beziehungsweise Volatilität des Zeitraumes $[T_i, T_j]$, $T_j > T_i$ spekuliert.

anzugeben. Jedoch gewährleistet dies noch nicht die Identifizierung einer geeigneten (dynamischen) Handelsstrategie, die in der Lage ist, den VDAX-New Futures beziehungsweise Spot zu replizieren. Somit bleibt es fraglich, ob es in der Zukunft zu einem Anstieg der Handelsumsätze in den VDAX-NEW Futures kommen wird.

Trotz aller Kritik an der (bis heute) tatsächlichen Nichthandelbarkeit des VDAX-New sei zu erwähnen, dass die ökonomische Motivation, welche dem Wechsel des Index-Berechnungskalküls zugrunde liegt, um einiges konkreter und robuster ist als die des alten VDAX. Die ökonomische Interpretation des VDAX als Approximation der Volatilitäts-Swap-Rate, konnte erst einige Zeit nach der Einführung des Index auch theoretisch dargelegt werden.⁷³ Des Weiteren ist das Berechnungskalkül des VDAX, d.h. die Bestimmung eines Schätzers für die durchschnittliche implizite Einmonats-ATMF-Volatilität, an die Vorgabe eines spezifischen Optionspreismodells gebunden. Das Berechnungsschema des VDAX-New ist im Gegensatz dazu weitgehend modellunabhängig. Der Index bestimmt sich aus der Quadratwurzel des Wertes eines aus tatsächlich am Markt gehandelten Optionen zusammengestellten Portfolios. Aufgrund der weiten Bandbreite herangezogener Optionen, kann ferner ein weiter Bereich des Volatilitäts-Skew abgedeckt werden und nicht nur eine punktuelle Einschätzung am ATMF-Punkt erreicht werden.

4.3.3 Indexzertifikate auf den VDAX-New

Die Problematik der Umsetzbarkeit von auf den VDAX-New basierenden Handelsstrategie offenbart sich auch auf dem Markt für Indexzertifikate, wobei hier insbesondere noch die mit einer endlosen Laufzeit einhergehende Roll-over-Problematik zu berücksichtigen ist.

Emittenten strukturierter Finanzprodukte erkannten das Verlangen privater und institutioneller Investoren nach einer aus Diversifikationsaspekten vielversprechenden Anlagemöglichkeit in Volatilität, die im Sinne eines Indexzertifikats möglichst transparent und einfach nachvollziehbar ist.⁷⁴ Goldman Sachs war der erste Emittent, der sich dazu entschied, ein endlos laufendes Indexzertifikat auf den laufzeitunabhängigen VDAX-New, das *VDAX-New Open-End-Zertifikat* beziehungsweise später das *VDAX-New Open-End-Volatilitätsstrukturkurven-Zertifikat* (ISIN:

⁷³Vgl. Abschnitt 4.2.1 und CARR/WU (2006a), S. 16.

⁷⁴Das heißt, es wird eine eins zu eins Abbildung des zugrunde liegenden Basiswertes angestrebt.

DE000GS0DVD5), aufzulegen. Aufgrund der Tatsache, dass mit diesem Papier, bedingt durch die Open-End Komponente und dem damit verbundenen Roll-over-Transaktionen in Forward-Kontrakten (und der damit verbundenen Abhängigkeit von der Laufzeitstruktur der Varianz), keine angemessene beziehungsweise wünschenswerte Nachbildung des VDAX-New Index möglich war, entschied sich Goldman Sachs das Produkt im Sommer 2008, nach einem Kursverlust von fast 90% (bezogen auf den Emissionskurs), vorzeitig zu kündigen. Der Index selbst legte in derselben Zeitspanne um etwa 70% zu (vgl. Abbildung 4).⁷⁵ Goldman Sachs verfolgte

Abbildung 4: **VDAX-New Zertifikat und VDAX-New im direkten Vergleich.**



Quelle: Bloomberg L.P., Thomson Reuters Financial Datastream.

te allerdings von vornherein nicht das Ziel, den laufzeitunabhängigen VDAX-New Index eins zu eins abzubilden. Die Emittentin entschied sich dafür, auf eine tägliche Anpassung der Absicherungsposition zu verzichten und stattdessen bei der Absicherung der Zertifikate eine Position in synthetischen VDAX-New Forward-Kontrakten einzunehmen, die dann ein Mal monatlich prolongiert („gerollt“) wird. Der Wert des

⁷⁵Die Abbildung 4 bezieht sich nicht auf die gesamte Laufzeit des Zertifikats, da für den Zeitraum vom September 2005 bis zum Januar 2007 keine Kursdaten vorlagen.

synthetischen VDAX-New Forwards bestimmt sich dabei wie folgt:⁷⁶

$$\begin{aligned}
 F^{Synth.VDAX-NEW} &= \left(\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{T_j - T_0} \int_{T_0}^{T_j} \sigma_u^2 du | \mathcal{F}_{T_0} \right] \cdot (T_j - T_0)}{T_j - T_i} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{T_i - T_0} \int_{T_0}^{T_i} \sigma_u^2 du | \mathcal{F}_{T_0} \right] \cdot (T_i - T_0)}{T_j - T_i} \right)^{1/2} \\
 &= \sqrt{\frac{\text{VDAX-New}_{T_0, T_j}^2 \cdot (T_j - T_0) - \text{VDAX-New}_{T_0, T_i}^2 \cdot (T_i - T_0)}{T_j - T_i}},
 \end{aligned} \tag{54}$$

was äquivalent zu der Darstellung

$$F^{Synth.VDAX-NEW} = \sqrt{K_{T_i, T_j}^{var}} \tag{55}$$

ist. Wie aus Gleichung (54) beziehungsweise (55) ersichtlich ist, wird der Wert des synthetischen Forwards als Quadratwurzel der Varianz-Swap-Rate eines Forward Varianz-Swaps, der in Gleichung (53) angegebenen Obergrenze für den Wert des VDAX-New Futures, ermittelt.⁷⁷ Der synthetische Forward entspricht somit der Quadratwurzel der zum Zeitpunkt $t = T_0$ erwarteten quadratischen Variation des Zeitraumes $[T_i, T_j]$, $j \geq i$ unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} . Unerwünschte Rollkosten entstehen immer dann, wenn am Tag der Prologation des synthetischen Forwards der Preis des neu zu erwerbende Kontrakts, welcher dann der Quadratwurzel der zum Zeitpunkt $T_j \geq T_i$ erwarteten zukünftigen Varianz des Zeitraumes $[T_j, T_k]$, $k \geq j$ entspricht, über dem Verkaufspreis des alten Kontrakts liegt. Dies ist immer dann der Fall, sofern eine ansteigende Laufzeitstruktur der impliziten Volatilität (Volatilitätsstruktur) beziehungsweise genauer der Quadratwurzel der erwarteten zukünftigen Varianz vorliegt. Da diese Konstellation sehr häufig am Markt zu beobachten ist, kommt es entsprechend oft zu den damit verbundenen unerwünschten Rollkosten, was sich dann konsequenterweise auch im Kursverlauf des Zertifikats sichtbar macht.⁷⁸ Die Roll-over-Problematik, die bei der Absicherung der endlos

⁷⁶Vgl. GOLDMAN SACHS (2007b), S. 30 ff.

⁷⁷Wenn man davon ausgeht, dass Forward und Futures-Kurs miteinander übereinstimmen, was sich etwa durch die Annahme einer deterministischen Entwicklung des zukünftigen Zinsniveaus rechtfertigen ließe.

⁷⁸Berücksichtigung finden die Rollkosten durch eine Anpassung des Bezugsverhältnisses des Zerti-

laufenden Zertifikate mit Hilfe der synthetischen Forward-Kontrakte unweigerlich auftritt, sorgte dafür, dass das Produkt von Goldman Sachs die an das Produkt geknüpften Erwartungen vieler Anleger nicht erfüllen konnte beziehungsweise das Produkt selbst missverstanden wurde, obwohl Goldman Sachs die oben beschriebene Zertifikate-Konstruktion und die damit verbundenen Eigenschaften offen auf ihrer Internetpräsenz dokumentiert hatte.

Offen bleibt die Frage, wie genau die Emittentin ihre Absicherung durchführte, d.h. welche (dynamische) Handelsstrategie sich hinter dem synthetischen VDAX-New Forward verbarg. Man steht somit wieder vor dem bekannten Problem, eine geeignete Replikationsstrategie zu identifizieren. Da bereits in Abschnitt 4.3.1.1 gezeigt wurde, dass eine Approximation auf Grundlage einer auf Volatilitäts-Swaps basierenden Handelsstrategie—bedingt durch den Konvexitätsfehler—unbefriedigend ist, scheidet dieser Ansatz in diesem Fall ebenfalls aus.⁷⁹ Das heißt, dass die Annahme, eine Gleichheitsbeziehung in Ungleichung (53) vorauszusetzen nicht zulässig ist. Es verbleibt dann die, schon angesprochene, dynamische Absicherung mittels (Forward) Varianz-Swap Kontrakten.

Derzeit sind Produkte auf die VDAX-New-Volatilitätsindex der Deutsche Börse AG, gänzlich vom Markt verschwunden, was vermutlich auch auf die nur unzureichende Handelbarkeit des Index zurückgeführt werden kann.

4.4 Zusammenfassung

Das Ziel dieses Kapitels bestand darin, die theoretischen Grundlagen der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-NEW der Deutsche Börse AG darzustellen und die beiden Indizes auf Charakteristika bezüglich ihrer Handelbarkeit hin zu analysieren. Dabei galt es insbesondere das Argument der Indexbetreiber, durch den Wechsel des Berechnungsmodells Vorteile hinsichtlich der Schaffung des Handels und der Absicherung derivativer Produkte auf diesen Index geschaffen zu haben, zu überprüfen.

Nachdem mit der Vorstellung des Volatilitäts- und des Varianz-Swaps in Kapitel 3 zunächst die Grundlagen für eine weiterführende Interpretation des VDAX

fikats, welches die Rollkosten beziehungsweise -erträge widerspiegelt und zwischen dem Stand des VDAX-New und dem Wert des Zertifikats geschaltet ist.

⁷⁹Der einzige Unterschied ist, dass wir es in diesem Fall mit Forward-Starting Volatilitäts-Swaps zu tun hätten.

und des VDAX-New dargelegt wurde, konnten wir in Abschnitt 4.2.1 und 4.2.2 die Zusammenhänge dieser beiden Finanzinstrumente und der Volatilitätsindizes der Deutsche Börse AG aufzeigen. Es wurde gezeigt, dass der VDAX (beziehungsweise die acht Subindizes) approximativ mit der Swap-Rate eines mit einer entsprechenden Laufzeit ausgestatteten Volatilitäts-Swap übereinstimmt. Das Nachfolgemodell, der VDAX-New (inklusive der zugehörigen acht Subindizes), bildet hingegen die Quadratwurzel der Swap-Rate eines Varianz-Swaps mit einer dem Index entsprechenden Laufzeit ab.

In Abschnitt 4.3 ging es darum, aufbauend auf den Erkenntnissen der vorherigen Abschnitte, aufzuzeigen, inwiefern die beiden hier vorgestellten Volatilitätsindizes tatsächlich dynamisch beziehungsweise statisch handelbar sind. Es zeigte sich, dass der VDAX mittels einer dynamischen Handelsstrategie in Volatilitäts-Swaps replizierbar und somit handelbar ist. Auf den VDAX-New trifft dies jedoch nicht ohne weiteres zu. Trotz der Ankündigung, durch die Einführung des VDAX-New eine verbesserte Handelbarkeit von Volatilitätsindizes zu erreichen, scheint bislang keine angemessene (dynamische) Replikationsstrategie des Index—der in Volatilitätspunkten angegebenen Varianz-Swap-Rate—gegeben zu sein. Der VDAX-New scheint seinem Vorgänger in den Aspekten Robustheit und Informationsdichte überlegen zu sein, hinsichtlich des Aspektes der Handelbarkeit kann dies jedoch nicht bestätigt werden.

Eine interessante Alternative zu den Volatilitätsindizes der Deutsche Börse AG wäre die Einführung von Varianzindizes. Diese beziehen sich dann tatsächlich auf die zukünftig erwartete Varianz, ohne diese in Einheiten von Volatilität umzuwandeln und damit die Handelbarkeit und Auflegung von Replikationsstrategien zu erschweren. Durch den Einsatz von Varianz-Swaps beziehungsweise Forward Varianz-Swaps wäre dann eine wenig komplizierte Indexreplikation erreichbar und die Auflegung entsprechender Zertifikate erheblich einfacher umsetzbar.⁸⁰ Die amerikanische CBOE hat mit der Einführung ihres *12-Month Variance Index* und *3-Month Variance Index* diesen Ansatz verfolgt. Allerdings hält sich der Erfolg der Einführung, gemessen am Handelsvolumen in den auf diese Indizes aufgelegten Variance-Futures-Kontrakte, bislang noch in Grenzen. So belief sich das Open-Interest am 27.02.2009 auf gerade

⁸⁰Eventuell anfallende Rollkosten können bei der Abbildung eines laufzeitunabhängigen Varianzindex jedoch selbstverständlich nicht ausgeschlossen werden.

einmal 49 Kontrakte.⁸¹

⁸¹Quelle: <http://cfe.cboe.com/data/CFEMktStat.aspx>

5 Zum Informationsgehalt der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG

5.1 Vorbemerkungen

BLACK/SCHOLES/MERTON zeigen 1973, dass die Volatilität als das zentrale Element in die Bewertung von Optionen beziehungsweise bedingten Zahlungsverprechen eingeht. Problematisch ist nur, dass die Volatilität selbst nicht beobachtbar ist. Da jedoch alle weiteren Parameter für die Bestimmung des arbitragefreien Preises einer Option nach dem BSM-Modell leicht zu identifizieren sind, ist man in der Praxis dazu übergegangen, die Volatilität invers aus am Markt beobachtbaren Optionspreisen zu bestimmen. Die so geschätzte implizite Volatilität wird dann für gewöhnlich als die vom Markt erwartete zukünftige Volatilität über die Laufzeit der Option interpretiert und als Schätzer für eben diese verwendet. Die Frage ist jedoch, inwiefern sich die Verwendung impliziter Volatilitäten als Prognose für die zukünftige Volatilität tatsächlich rechtfertigen lässt. Die impliziten Volatilitäten werden im Rahmen dieser Arbeit durch die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG repräsentiert. Hierbei handelt es sich um Durchschnittswerte geeignet gewichteter impliziter Volatilitäten beziehungsweise Varianzen, die eine möglichst effiziente Abbildung der vom Markt implizierten Volatilität beziehungsweise Varianz gewährleisten sollen. Die Prognosefähigkeit beziehungsweise der Informationsgehalt der beiden Volatilitätsindizes soll mittels eines linearen Regressionsmodells überprüft werden. Hierbei wird dann die (ex post bekannte) Volatilität eines genau festgelegten Zeitraumes auf den VDAX beziehungsweise VDAX-New Indexstand regressiert. Im Gegensatz zu dem sonst üblichen Ansatz, die Volatilität mit Hilfe der Stichprobenstandardabweichung zu schätzen, greifen wir in dieser Arbeit auf insgesamt sechs alternative Volatilitätsschätzer zurück, um zu untersuchen, inwiefern der Erklärungsgehalt impliziter Volatilitäten auch von dem für die Berechnung der Volatilität verwendeten Schätzer abhängig ist. Die Schätzung der tatsächlich verwirklichten Volatilität des DAX geschieht hierbei zum einen auf Basis von Tagesdaten, zum anderen auf Basis hochfrequenter Intratagesdaten.

Es existieren zahlreiche Arbeiten, die sich mit der Prognosefähigkeit implizi-

ter Volatilitäten beschäftigt haben.⁸² In einigen der ersten Studien haben LATANE/RENDLEMAN (1976), CHIRAS/MANASTER (1978), BECKERS (1981) und JORION (1995) für den amerikanischen Aktienmarkt beziehungsweise den Fremdwährungsmarkt herausgefunden, dass implizite Volatilitäten einen substanziellen Informationsgehalt hinsichtlich der zukünftigen Volatilität enthalten und sich für Prognosezwecke besser eignen als historische Maßzahlen. Im Gegensatz dazu zeigt die Analyse von CANINA/FIGLEWSKI (1993), dass sich implizite Volatilitäten nicht als Vorhersage zukünftiger Volatilitäten eignen. Für den deutschen Aktienmarkt liegen deutlich weniger Forschungsarbeiten vor. Der Beitrag von BLUHM/YU (2001) untersucht die Vorhersagekraft zweier unterschiedlicher Ansätze. Es handelt sich hierbei zum einen um verschiedene univariate Zeitreihenmodelle (das Modell der exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitte (EWMA), vier verschiedene Modelle vom ARCH-Typ sowie ein Modell mit stochastischer Volatilität) und zum anderen um implizite Volatilitäten, für die auf den Volatilitätsindex VDAX zurückgegriffen wird. Die Autoren kommen zu dem Schluss, dass es keinen eindeutigen Sieger gibt. Steht die Bewertung von Optionskontrakten im Vordergrund, empfehlen BLUHM/YU die Verwendung des Modells mit stochastischer Volatilität und der impliziten Volatilität. Für die Bestimmung des Value-at-Risk eignen sich hingegen die Modelle vom ARCH-Typ besser. CLAESSEN/MITTNIK (2002) untersuchen ebenfalls die Eignung verschiedener Prognosetechniken (beispielsweise implizite Volatilitäten oder Zeitreihenmodelle wie GARCH-Modelle) für die zukünftige Volatilität des DAX-Index und ob der dem DAX zugehörige Optionsmarkt informationseffizient ist. Die Autoren kommen zu dem Schluss, dass implizite Volatilitäten eine verzerrte, aber hoch informative Prognose zukünftiger Volatilitäten leisten und den auf historischen Informationen basierenden Prognoseverfahren überlegen sind. Der vorliegende Beitrag ergänzt die bereits bestehende Literatur in der Hinsicht, als dass bislang nur wenige Forschungsarbeiten zum deutschen Aktien- beziehungsweise Optionsmarkt existieren. Hinzu kommt, dass wir in dieser Arbeit zwei Volatilitätsindizes, denen beiden ein vollkommen unterschiedliches Berechnungsschema zugrunde liegt, hinsichtlich ihrer Vorhersagekraft beziehungsweise ihres Informationsgehaltes, gegenüberstellen. Des Weiteren soll untersucht werden, inwiefern die Ergebnisse der Analyse von dem

⁸²Für einen exzellenten Überblick der zu dieser Thematik existierenden Literatur sei auf den Artikel von POON/GRANGER (2003) verwiesen.

für die Berechnung der historischen Volatilität verwendeten Schätzer abhängen. Die Einbeziehung hochfrequenter Daten für den deutschen Aktienmarkt stellt ebenfalls eine Innovation dar.

Die Analyse gliedert sich in sechs Abschnitte. Im folgenden Abschnitt wird zunächst die Motivation für die Anwendung implizier Volatilitäten zur Prognose zukünftiger Volatilitäten und die Möglichkeit, diesen Sachverhalt mit Hilfe eines geeigneten Regressionsmodells zu untersuchen, dargestellt. Anschließend werden die in dieser Arbeit verwendeten Volatilitätsschätzer, sowie die beiden Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New vorgestellt. Aufbauend auf den Erkenntnissen der vorangehenden Abschnitte, wird dann in den Abschnitten 5.4, 5.5 und 5.6 untersucht, inwiefern die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New in der Lage sind, die zukünftige Volatilität zu prognostizieren und insbesondere darauf eingegangen, ob es durch die Verwendung verschiedener Volatilitätsschätzer und verschiedener Datenfrequenzen zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen hinsichtlich der Genauigkeit der Prognose und deren Informationsgehalt für den VDAX und VDAX-New kommt. Der letzte Abschnitt fasst die wichtigsten Erkenntnisse dieses Beitrags noch einmal zusammen.

5.2 Der Informationsgehalt impliziter Volatilitäten

5.2.1 Integrierte Varianz und implizite Volatilität

Es erscheint angebracht, sich zunächst die beiden für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtigen Konzepte der integrierten Varianz und der impliziten Volatilität klar zu machen.

Die integrierte Varianz stellt ein Maß für die Renditevariation über ein gegebenes Zeitintervall dar und ist die für uns interessierende zu schätzende Größe, die der impliziten Volatilität des korrespondierenden Zeitraumes gegenübergestellt werden soll. Ausgangspunkt sei zunächst die Annahme, dass der logarithmierte Preis $p_t \equiv \ln(S_t)$ eines Basiswertes S_t dem nachfolgenden Diffusionsprozess folgt:⁸³

$$dp_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}}, \quad 0 \leq t < \infty \quad (56)$$

⁸³Bei p_t handelt es sich um ein Semimartingal, das auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definiert ist und an die Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ adaptiert ist.

Der Driftprozess μ_t ist stetig und von endlicher Variation, der instantane Volatilitätsprozess σ_t ist càdlàg und $W_t^{\mathbb{P}}$ bezeichnet eine standardisierte BROWN'sche Bewegung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Von Interesse ist nun das Ausmaß der Renditeschwankungen über einen gegebenen Beobachtungszeitraum $[a, b] \subseteq [0, \infty)$. Die Wahl $[a, b] = [0, 1]$ soll einen Tag repräsentieren und den für uns zunächst relevanten Zeitraum darstellen.⁸⁴ Ein natürlicher Kandidat für das Ausmaß der Renditeschwankungen ist die quadratische Variation $QV_{0,1}$, die durch

$$QV_{0,1} = \int_0^1 \sigma_u^2 du \quad (57)$$

gegeben ist. Da es sich bei (56) um einen reinen Diffusionsprozess ohne Sprungkomponente handelt, stimmen in diesem Fall die quadratische Variation $QV_{0,1}$ und die integrierte Varianz $IV_{0,1}$ miteinander überein, d.h.

$$IV_{0,1} = \int_0^1 \sigma_u^2 du . \quad (58)$$

Aus ökonometrischer Sicht besteht das Problem nun darin, dass es sich bei $IV_{0,1}$ um eine latente Variable handelt. Es ist somit von zentraler Bedeutung, auf geeignete Schätzer für die integrierte Varianz und damit für die Volatilität über einen bestimmten Beobachtungszeitraum $[a, b]$ zurückgreifen zu können. So kann dann für einen gegebenen Stichprobenpfad die korrespondierende integrierte Varianz ex post mit Hilfe geeigneter Verfahren geschätzt werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir bei der Schätzung der integrierten Varianz sowohl auf Tagesdaten als auch auf hochfrequente Daten, die in einem zeitlichen Abstand von 15 Minuten gemessen wurden, zurückgreifen. Die verschiedenen Schätzer der integrierten Varianz, als Maß für die Volatilität eines gegebenen Beobachtungszeitraumes, werden in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

Die implizite Volatilität berechnet sich über die am Markt beobachtbaren Preise von Optionen, die diese konsistent mit den Werten eines Optionspreismodells (z.B. des BSM-Modells⁸⁵) machen. Im BSM-Modell wird der Wert einer Option,

⁸⁴Die Schätzung der integrierten Varianz über einen Zeitraum von N Tagen bestimmt sich dann aus der Summe der N geschätzten Tagesvarianzen (vgl. Abschnitt 5.3).

⁸⁵Dem BSM-Modell liegt die Annahme zugrunde, dass der logarithmierte Kursprozess des Basiswertes dem Diffusionsprozess (56) mit konstanten Parametern $\mu_t = \mu$ und $\sigma_t = \sigma$ folgt. Die integrierte Varianz über den Zeitraum $[a, b]$ bestimmt sich in diesem Fall gemäß $IV_{a,b} = \sigma^2 \cdot (b - a)$.

neben der (als konstant angenommenen) Volatilität (σ), von vier weiteren Größen bestimmt. Diese sind der Kurs des Basiswertes (S_t), der Basispreis der Option (K), die Restlaufzeit ($T - t$) sowie das für die Laufzeit relevante gegenwärtige Zinsniveau (r). Sind diese vier am Markt beobachtbaren Einflussfaktoren und der Marktpreis der Option bekannt, so bleibt die Volatilität als einzige unbekannte Größe übrig. Es gilt dann statt

$$C_t^{\text{BS}} = f(S_t, K, r, T - t, \hat{\sigma}_{t,T})$$

mit $\hat{\sigma}_{t,T} \equiv \sqrt{\frac{1}{T-t} \widehat{IV}_{t,T}}$, wobei in diesem Fall $\widehat{IV}_{t,T} = \hat{\sigma}^2 \cdot (T - t)$ gilt, die Bestimmung von

$$\sigma_{t,T}^I = f(S_t, K, r, T - t, C_t^{\text{Mkt}})$$

vorzunehmen.⁸⁶ Hierbei entspricht C_t^{BS} dem Modellwert der Option nach BSM, C_t^{Mkt} dem quotierten Marktpreis der Option und $\sigma_{t,T}^I$ der impliziten Volatilität der Fälligkeit T zum Zeitpunkt t .⁸⁷ Die implizite Volatilität wird aufgrund ihrer impliziten Berechnungsweise oftmals als die von den Marktteilnehmern für einen bestimmten zukünftigen Zeitraum $[t, T]$ erwartete (und bezahlte) Volatilität verstanden. Das heisst, es soll (zumindest näherungsweise) die Beziehung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\sigma_{t,T} | \mathcal{F}_t) \approx \sigma_{t,T}^I, \quad (59)$$

mit $\sigma_{t,T} \equiv \sqrt{\frac{1}{T-t} IV_{t,T}}$ und $IV_{t,T} = \int_t^T \sigma_u^2 du$, gelten. Die Informationsmenge \mathcal{F}_t enthält alle öffentlich verfügbaren Informationen und somit auch die historischen Kursnotierungen, die in eine Berechnung der (ex post betrachteten) integrierten Varianz eingehen. Gleichung (59) drückt daher aus, dass der Markt auf Basis der zur Verfügung stehenden Informationen eine erwartungstreue beziehungsweise rationale Vorhersage macht. Die Berechnung einer historischen Volatilität würde unter diesen Umständen keine weiteren Erkenntnisgewinne bezüglich des Ausmaßes der zukünft-

⁸⁶Vgl. THOMAS (2008), S. 140.

⁸⁷Es wird somit vorausgesetzt, dass das zugrunde liegende Bewertungsmodell (hier das BSM-Modell) auch tatsächlich vom Markt angewendet wird und die beobachteten Marktpreise im Sinne des Modells korrekt bewertet sind. Vgl. PODDIG/DICHTL/PETERSMEIER (2001), S.129.

tigen Schwankungsintensität der Renditen eines Basiswertes bringen, da sämtliche Informationen bereits in der impliziten Volatilität enthalten sind.⁸⁸ Die Gleichung (59) muss jedoch nicht notwendigerweise in der Realität erfüllt sein, was auch die empirischen Befunde im weiteren Verlauf der Arbeit belegen werden.

Eine theoretische Erklärung der gerade angestellten Überlegungen lässt sich im Rahmen des stochastischen Volatilitätsmodell von HULL/WHITE (1987) anführen. Die Kernannahme des Modells ist die, dass der stochastische Prozess des Basiswertes p_t und der Varianz σ_t^2 —wobei es sich bei beiden Prozessen um lognormalverteilte Diffusionsprozesse handelt—unkorreliert sind.⁸⁹ HULL/WHITE zeigen dann, dass der Optionspreis geschrieben werden kann als der Optionswert nach BSM, integriert über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der durchschnittlichen integrierten Varianz $IV_{t,T}$ während der Laufzeit der Option.⁹⁰

$$C_t^{\text{HW}}(K, \dots) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_t^{\text{BS}}(\sigma_{t,T}, K, \dots) | \mathcal{F}_t) \quad (60)$$

mit $\sigma_{t,T} \equiv \sqrt{\frac{1}{T-t} IV_{t,T}}$ und $IV_{t,T} = \int_t^T \sigma_s^2 ds$. Greift man nun auf das Resultat von FEINSTEIN (1988) zurück, welches besagt, dass die Optionspreisformel nach BSM für eine ATMF-Option ($K = F_{t,T}$) nahezu linear in dem Volatilitätsparameter ist, so führt dies auf die Beziehung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_t^{\text{BS}}(\sigma_{t,T}, F_{t,T}, \dots) | \mathcal{F}_t) \approx C_t^{\text{BS}}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\sigma_{t,T} | \mathcal{F}_t), F_{t,T}, \dots).$$

In Verbindung mit (60) ergibt sich dann

$$C_t^{\text{HW}}(F_{t,T}) \approx C_t^{\text{BS}}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\sigma_{t,T} | \mathcal{F}_t), F_{t,T}, \dots). \quad (61)$$

beziehungsweise unter Berücksichtigung der Definition der impliziten Volatilität als Umkehrfunktion der BSM-Formel

$$\sigma_{t,T}^I = (C_t^{\text{BS}})^{-1}(C_t^{\text{HW}}(F_{t,T})). \quad (62)$$

⁸⁸Vgl. FIGLEWSKI (2004), S. 81 ff.

⁸⁹Eine Korrelation von Null zwischen dem Prozess des Basiswert und der Volatilität beziehungsweise Varianz impliziert einen symmetrischen Volatilitäts-Smile. Ein asymmetrischer Verlauf kann nur durch eine Korrelation, die ungleich von Null ist abgebildet werden.

⁹⁰Vgl. HULL/WHITE (1987), S. 287 ff., FLEMING (1998), S. 319 ff.

Damit ergibt sich ein zu dem in Gleichung (59) postulierten äquivalenter Zusammenhang:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\sigma_{t,T}|\mathcal{F}_t) \approx \sigma_{t,T}^I \quad (63)$$

Im Rahmen des HULL/WHITE-Modells lässt sich somit zeigen, dass die implizite Volatilität mit der unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} erwarteten Volatilität, gemessen auf Basis der integrierten Varianz, (approximativ) übereinstimmt. Zu beachten ist jedoch, dass der Erwartungswert bezüglich eines synthetischen und nicht des realen Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P} gebildet wird. Es stellt sich somit die Frage, inwiefern sich die implizite Volatilität unter dem synthetischen Wahrscheinlichkeitsmaß als Prognose für die zukünftige Volatilität eignet. ANDERSON et al. (2007) sowie CARR/WU (2004) zeigen, dass eine Gleichheit der Erwartungen unter den Maßen \mathbb{P} und \mathbb{Q} nur dann gegeben ist, wenn eine Varianz- beziehungsweise Volatilitätsrisikoprämie nicht im Markt eingepreist ist. Die gängige Erkenntnis ist jedoch, dass die Risikoprämie signifikant und für gewöhnlich negativ ist und positiv von dem Niveau der erwarteten zukünftigen Volatilität abhängt.⁹¹ Diese Tatsache darf daher bei der Auswertung der Prognosefähigkeit impliziter Volatilitäten nicht unberücksichtigt bleiben.

5.2.2 Die Prognosefähigkeit impliziter Volatilitäten

Definitionsgemäß bestimmt sich der realisierte Wert einer stochastischen Variable durch ihren erwarteten Wert zuzüglich eines Störterms. Angewandt auf die in dieser Arbeit behandelte Thematik, ergibt sich die folgende Darstellung, deren Gültigkeit im weiteren Verlauf der Arbeit mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells überprüft werden soll:

$$\sigma_{t,T} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\sigma_{t,T}|\mathcal{F}_t) + \varepsilon_{t,T} \Leftrightarrow \sigma_{t,T} = \sigma_{t,T}^I + \varepsilon_{t,T} \quad (64)$$

⁹¹Vgl. Abschnitt 6 sowie ANDERSON et al. (2007), CARR/WU (2004), BONDARENKO (2007). Die beiden letztgenannten Autoren finden in ihren Analysen eine negative und statistisch signifikante Varianz- beziehungsweise Volatilitätsrisikoprämie. Diese äußert sich darin, dass die implizite Varianz beziehungsweise Volatilität im Mittel deutlich oberhalb der integrierten Varianz beziehungsweise der Volatilität liegt. Inwiefern sich das Vorliegen einer Risikoprämie in den Ergebnissen der Regression widerspiegeln kann, wird in Abschnitt 5.6 erläutert.

mit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varepsilon_{t,T}) = 0; \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\sigma_{t,T}^I \varepsilon_{t,T}) = 0 . \quad (65)$$

Hierbei bezeichnet $\sigma_{t,T}$ die positive Quadratwurzel der über den Zeitraum $[t, T]$ durchschnittlichen integrierten Varianz, die aufgrund der hier angestellten ex-post Betrachtung bereits im Zeitpunkt t vorliegt und daher der korrespondierenden impliziten Volatilität gegenübergestellt werden kann. Die Variable $\sigma_{t,T}^I$ steht für die zum Zeitpunkt t vorliegende implizite Volatilität der Fälligkeit T und $\varepsilon_{t,T}$ für den korrespondierenden Störterm. Die Frage ist somit, inwiefern sich implizite Volatilitäten beziehungsweise die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New als Prognose zukünftiger Volatilitäten eignen.

Die Gleichungen (64) und (65) führen dann unmittelbar auf das lineare Regressionsmodell

$$\hat{\sigma}_{t,T} = b_0 + b_1 \sigma_{t,T}^I + e_{t,T} ,$$

mit den zu schätzenden Parametern b_0 und b_1 . Diese Methodik, das heißt, die Regression eines realisierten Wertes auf den entsprechenden Prognosewert eines vorherigen Zeitpunktes, ist als MINCER/ZARNOWITZ-Regression bekannt.⁹² Die Ergebnisse der Regressionsanalyse lassen sich dann wie folgt deuten:⁹³ Optionspreise beziehungsweise implizite Volatilitäten enthalten Informationen bezüglich der zukünftigen Volatilität genau dann, wenn der Schätzwert für b_1 signifikant von Null verschieden ist, die Hypothese $b_1 = 0$ folglich abgelehnt wird. Wird die Hypothese $b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ abgelehnt, so handelt es sich bei der impliziten Volatilität als solche um eine verzerrte Prognose der zukünftigen Volatilität. Eine verzerrte Prognosegenauigkeit bedeutet jedoch nicht, dass die implizite Volatilität nicht trotzdem einen hohen Informationsgehalt hinsichtlich der zukünftigen Volatilität bereitstellen kann, was sich insbesondere darin äußert, dass durch das betrachtete Regressionsmodell ein hoher Anteil der Gesamtschwankung der endogenen Variable (der positiven Qua-

⁹²Vgl. MINCER/ZARNOWITZ (1969).

⁹³Vgl. POTESHMAN (2000), S. 5.

dratwurzel der integrierten Varianz) erklärt werden kann.⁹⁴ Die Prognosegenauigkeit lässt sich erhöhen, wenn die Verzerrung entsprechend korrigiert werden kann.

Für die Inferenzstatistiken gilt es zu beachten, dass Daten der hier vorliegenden Form weder frei von Heteroskedastizität noch frei von Autokorrelation sind.⁹⁵ Die OLS-Schätzer sind zwar weiterhin konsistent, jedoch nicht mehr effizient. Um weiterhin mit den OLS-Schätzern arbeiten zu können und valide Teststatistiken zu erhalten, ist es notwendig die Standardfehler der Schätzer b_0 und b_1 zu korrigieren und so der vorliegenden Heteroskedastizität (unbekannter Form) und Autokorrelation Rechnung zu tragen. Wir greifen in dieser Arbeit auf die robusten NEWEY/WEST-Schätzer⁹⁶ für die Varianz-Kovarianz-Matrix zurück und orientieren uns damit an der Vorgehensweise in CARR/WU (2006). Für das maximale Lag wählen wir je nach Volatilitätsindex entweder einen Wert von 30 für den VDAX-New oder einen Wert von 45 für den VDAX, d.h. die Anzahl Kalendertage auf die sich (impliziten) Volatilitätsindizes sowie die Schätzer der integrierten Varianz beziehen und um so die überlappenden Beobachtungszeiträume angemessen zu berücksichtigen.

Ein wichtiger Aspekt, dem in vielen Arbeiten zu der hier behandelten Thematik meist wenig Beachtung geschenkt wird, ist die Wahl des Schätzers der integrierten Varianz beziehungsweise der Volatilität. Für gewöhnlich bedient man sich hier des auf Tagesdaten basierenden Schätzers für die Stichprobenstandardabweichung, in den die Schlusskurse des Basiswertes über ein bestimmtes Zeitintervall eingehen. Da die integrierte Varianz selbst nicht beobachtbar ist, scheint es sinnvoll, sich nicht auf nur einen Schätzer zu verlassen, sondern weitere Alternativen mit in die Analyse einzubeziehen. Im Rahmen einer MINCER/ZARNOWITZ-Regression soll dann untersucht werden, wie sich die Prognosefähigkeit der beiden Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New für die verschiedenen Volatilitätsschätzer verhält, und inwieweit

⁹⁴Vgl. FIGLEWSKI (2004), S. 99 ff. Der Autor weist in seinen Ausführungen auf die Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen dem Informationsgehalt und der Prognosegenauigkeit impliziter Volatilitäten hin.

⁹⁵Dies lässt sich insbesondere auf die Überlappung der Beobachtungszeiträume zurückführen, die aus der Verwendung täglicher Daten bei einem Prognosehorizont von 30 respektive 45 Tagen resultiert; die Restlaufzeiten der impliziten Volatilitäten übersteigen das Stichprobenintervall. Um zu überprüfen, ob es bei Verwendung nicht-überlappender Daten zu abweichenden Ergebnissen kommt, führen wir die Analyse in Abschnitt 5 sowohl mit Daten überlappender als auch nicht-überlappender Beobachtungszeiträume durch. Der Nachteil, welcher sich bei dem Rückgriff auf nicht-überlappende Beobachtungszeiträume ergibt, ist, dass so sehr viele Informationen unberücksichtigt bleiben.

⁹⁶Vgl. GREENE (2003), S. 266 ff., NEWEY/WEST (1987), S. 703 ff.

somit eine Aussage bezüglich des Informationsgehaltes des VDAX und VDAX-New von dem Schätzer der Volatilität abhängt.

Der nächste Abschnitt dient daher dazu, die in dieser Arbeit verwendeten Schätzer der Volatilität auf Grundlage der integrierten Varianz sowohl auf Basis von Tagesdaten als auch hochfrequenter Intratagesdaten vorzustellen und deren Charakteristika herauszustellen.

5.3 Volatilitätsschätzer

5.3.1 Volatilitätsschätzer basierend auf Tagesdaten

5.3.1.1 Der Close-to-Close-Schätzer Der Standardansatz, der für die Schätzung der integrierten Varianz über den Zeitraum $[0, 1]$, i.e. eines Tages, herangezogen wird, ist der sogenannte Close-to-Close Schätzer:

$$\hat{\sigma}_{0,1}^2 = r_t^2 \quad (66)$$

mit $r_t := \ln(S_t^C/S_{t-1}^C)$, wobei S_t^C für den Schlusskurs (Close) des Basiswertes des Tages t steht. Es handelt sich bei Gleichung (66) um den Maximum-Likelihood-Schätzer der konstanten Varianz σ^2 .⁹⁷ Da die Varianz als quadratische Größe eine andere Einheit als die beobachteten Werte der Messreihe selbst besitzt, stellt die positive Quadratwurzel der Varianz eine bessere Skalierung für das Streuungsverhalten von Beobachtungen dar.⁹⁸

⁹⁷Um die Genauigkeit der Schätzung zu erhöhen, wird häufig auf die Schätzung des Stichproben-Mittelwertes verzichtet. Hierdurch unterscheidet sich der Close-to-Close-Schätzer von dem anderen weit verbreiteten Ansatz, der mit der Stichprobenvarianz identisch ist. JORION (1995) führt an, dass unter Verwendung täglicher Daten der Term $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(r^2)$ den Term $(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(r))^2$ mit einem Faktor von 700:1 dominiert, so dass die Vernachlässigung des Mittelwertes \bar{r}_t nicht zu einer signifikanten Verzerrung der Volatilitätsschätzung führen sollte. Vgl. Jorion (1995), S. 510.

⁹⁸Grundsätzlich gilt es zu beachten, dass ein erwartungstreuer (unverzerrter) Schätzer für die Varianz durch die Umrechnung in einen solchen für die Volatilität nicht länger diese wünschenswerte Eigenschaft beibehält. Die JENSEN'sche Ungleichung besagt, dass der gewichtete Durchschnitt einer konkaven Funktion kleiner ist als der Funktionswert einer konkaven Funktion an der Stelle des gewichteten Durchschnitts:

$$\sum_{i=1}^n g_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n g_i x_i\right)$$

mit $g_i = 1/n$. Das Ausmaß der Verzerrung beziehungsweise einer Korrektur, um eine erwartungstreue Schätzung zu erhalten, hängt maßgeblich von dem Umfang der vorliegenden Stichprobe ab. Je größer diese ist, desto unbedeutender wird der Fehler. Da eine Korrektur in dieser Arbeit keinen bedeutenden Effekt auf die Ergebnisse der Regressionsanalyse hat, wird davon abgesehen.

Die Schätzung der integrierten Varianz beziehungsweise der Volatilität über den im weiteren Verlauf der Arbeit relevanten Zeitraum von 30 beziehungsweise 45 Tagen, erfolgt durch die Summierung der entsprechenden Tagesvarianzen $\hat{\sigma}_{0,1}^2$, d.h.:

$$\hat{\sigma}_{0,N} = \sqrt{a(N) \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{0,1;j}^2} \quad (67)$$

wobei für den VDAX-New $N = 30$ und für den VDAX $N = 45$ gelte. Der Term $a(N)$ ist hierbei ein Skalierungs- beziehungsweise Annualisierungsfaktor, welcher die Form $a(N) := 10.000 \cdot 365/N$ annimmt und den Schätzer in Einheiten annualisierter Prozentpunkte überführt und diese so mit den Notierungen der Volatilitätsindizes vergleichbar macht. Die Zahl 365 rührt daher, dass wir in dieser Arbeit unsere Berechnungen an die Konventionen der Volatilitätsindizes anpassen und gemäß diesen nicht mit bspw. 252 Handelstagen, sondern 365 Kalendertagen für den Zeitraum eines Jahres rechnen. Der Ansatz gemäß Gleichung (67) zur Schätzung der Volatilität über den Zeitraum von 30 beziehungsweise 45 Tagen, wird bei den in diesem Abschnitt noch folgenden Volatilitätsschätzern im Rahmen der Regressionsanalyse ebenfalls Anwendung finden.

Der am häufigsten angeführte Kritikpunkt des klassischen Close-to-Close-Schätzers (CtC-Schätzers) ist, dass dieser die verfügbaren Informationen nicht effizient verarbeitet. Durch die Aufnahme von Eröffnungs-, Höchst- und Tiefstkursen eines Handelstages würden mehr Informationen in die Schätzung eingehen und die Varianz der Schätzung reduzieren und damit die Güte der Schätzung erhöhen. Im Folgenden werden weitere Ansätze vorgestellt, die an dieser Schwachstelle des CtC-Schätzers anzusetzen, um so die Güte der Schätzung zu erhöhen.

5.3.1.2 Der PARKINSON-Schätzer Ein Varianz- beziehungsweise Volatilitätsschätzer, der nicht auf den Schlusskursen eines bestimmten Zeitintervalls beruht, wurde 1980 von PARKINSON eingeführt. Dieser verwendet die Extremwerte einer Handelsperiode in Form des Höchst- und Tiefststandes eines Basiswertes und spiegelt so die eigentliche hinter der Volatilität als ein Maß für das Schwankungsverhalten

eines Finanzinstruments stehende Intuition sehr gut wider:⁹⁹

$$\hat{\sigma}_{0,1}^2 = \frac{1}{4 \ln(2)} \ln \left(\frac{S_t^H}{S_t^L} \right)^2,$$

wobei S_t^H den Höchststand (High) und S_t^L den Tiefststand (Low) des Basiswertes eines Tag t bezeichnet. Der Parkinson-Schätzer ist bis zu fünf Mal effizienter als der klassische Close-to-Close Schätzer.¹⁰⁰ Das heißt, er konvergiert schneller gegen den wahren Wert. Hinzukommt, dass etwa 80% weniger Daten benötigt werden als für die traditionelle Methode, um eine bestimmte Genauigkeit der Varianzschätzung zu erzielen. Der PARKINSON-Schätzer liefert allerdings nur dann valide Werte, wenn keine Kurssprünge zum Handelsbeginn¹⁰¹ auftreten und der Kursprozess des Basiswertes keinerlei Driftkomponente, das heißt $\mu_t = 0$, beinhaltet. Die Schätzung der integrierten Varianz über den Zeitraum von 30 beziehungsweise 45 Tagen, erfolgt analog gemäß der Gleichung (67) aus dem vorherigen Abschnitt.

5.3.1.3 Der GARMAN/KLASS-Schätzer Beim GARMAN/KLASS-Schätzer handelt es sich um einen unverzerrten Varianz-Schätzer mit minimaler Varianz. Ausgangspunkt ist erneut die Annahme einer BROWN'schen Bewegung mit einer Drift von Null für den Prozess des Basiswertes. In den Schätzer gehen neben den Schlusskursen auch die Eröffnungs-, Höchst- und Tiefststände des zugrunde liegenden Basiswertes ein:¹⁰²

$$\hat{\sigma}_{0,1}^2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_t^H}{S_t^L} \right)^2 - (2 \ln(2) - 1) \ln \left(\frac{S_t^O}{S_t^C} \right)^2$$

Die Variable S_t^O bezeichnet hierbei den Eröffnungskurs des Basiswertes eines Tages t . Der Schätzer ist bis zu acht Mal effizienter als der CtC-Schätzer, wobei die genaue Effizienzsteigerung abhängig vom Stichprobenumfang ist. Wird die Annahme einer Drift von Null verletzt, ist die Unverzerrtheit des Schätzers nicht länger ge-

⁹⁹Vgl. PARKINSON (1980), S. 62 ff.

¹⁰⁰Die Varianz eines Schätzers beschreibt das Ausmaß der Abweichungen der Schätzung. Je kleiner die Varianz ist, umso genauer ist die Schätzung. Ein Schätzer A ist daher genau dann effizienter als ein Schätzer B , wenn dieser eine geringere Varianz aufweist, d.h. es gilt $Var(A) < Var(B)$. Als Benchmark dient hier und im Folgenden stets der klassische CtC-Schätzer.

¹⁰¹Von einem Kurssprung zu Beginn des Handels wird dann gesprochen, wenn der Eröffnungskurs $S_{t_j}^O$ vom Schlusskurs $S_{t_{j-1}}^C$ des vorherigen Tages beziehungsweise Zeitintervalls abweicht.

¹⁰²Vgl. GARMAN/KLASS (1980), S. 72.

geben. Hinzukommt, dass auch beim GARMAN/KLASS-Schätzer keine Kurssprünge zu Beginn des Handels berücksichtigt werden können.

5.3.1.4 Der ROGERS/SATCHELL-Schätzer ROGERS/SATCHELL (1991) setzen bei der Annahme eines Kursprozesses ohne Driftkomponente an und entwickeln einen unverzerrten Schätzer für beliebige Driftterme. Dieser Schätzer besitzt somit im Gegensatz zu den beiden zuvor genannten Ansätzen den Vorzug, dass dieser auch bei Vorliegen einer von Null verschiedenen Drift ein unverzerrter Varianzschätzer ist und insbesondere auch dann akkurate Schätzungen der integrierten Varianz σ^2 liefert, wenn die Volatilität der Drift sehr hoch ist.¹⁰³ Der ROGERS/SATCHELL-Schätzer ist gegeben durch:¹⁰⁴

$$\hat{\sigma}_{0,1}^2 = \ln \left(\frac{S_t^H}{S_t^C} \right) \ln \left(\frac{S_t^H}{S_t^O} \right) + \ln \left(\frac{S_t^L}{S_t^C} \right) \ln \left(\frac{S_t^L}{S_t^O} \right)$$

Eine wichtige Eigenschaft dieses Schätzers ist, dass dieser in der Lage ist, zwischen Drift und Varianz zu unterscheiden. Kommt es also zu einer einseitigen Aufwärtsbeziehungsweise Abwärtsbewegung, i.e. $S_t^H = S_t^C$ und $S_t^L = S_t^O$ beziehungsweise $S_t^L = S_t^C$ und $S_t^H = S_t^O$, nimmt der Schätzer einen Wert von Null an, weil sich in diesem Fall die Kursentwicklung einzig und allein auf die Drift zurückführen lässt.¹⁰⁵ Allerdings können auch beim ROGERS/SATCHELL-Schätzer keine Kurssprünge zu Beginn des Handels berücksichtigt werden.

5.3.1.5 Der YANG/ZHANG-Schätzer Alle drei zuletzt genannten Erweiterungen des klassischen CtC-Schätzers basieren auf verschiedenen Annahmen, wie etwa einer Drift von Null oder der Vernachlässigung von Kurssprüngen zum Handelsbeginn. YANG/ZHANG verfolgen daher das Ziel, einen unverzerrten Schätzer mit minimaler Varianz einzuführen, der unabhängig von Drift und Kurssprüngen zu Beginn des Handels valide Resultate liefert. Das Ergebnis ist ein Schätzer, der sich als gewichteter Durchschnitt der Open-to-Close-Varianz, der Close-to-Open-Varianz

¹⁰³Vgl. ROGERS et. al (1994), S. 242.

¹⁰⁴Vgl. ROGERS/SATCHELL (1991), S. 504 ff.

¹⁰⁵Vgl. YANG/ZHANG (2000), S. 480.

und des ROGERS/SATCHELL-Schätzers errechnet:¹⁰⁶

$$\hat{\sigma}_{0,1}^2 = \hat{\sigma}_O^2 + k\hat{\sigma}_C^2 + (1 - k)\hat{\sigma}_{RS}^2$$

mit

$$\hat{\sigma}_O^2 = \ln \left(\frac{S_t^O}{S_t^C} \right)^2, \quad \hat{\sigma}_C^2 = \ln \left(\frac{S_t^C}{S_t^O} \right)^2$$

Die Konstante k wird dabei so gewählt, dass der Schätzer eine minimale Varianz aufweist:

$$k = \frac{0,34}{1,34 - \frac{N+1}{N-1}}$$

Dieser Schätzer kann unter Umständen bis zu 14 Mal effizienter als der klassische Close-to-Close Schätzer sein. Dieses Ergebnis ist allerdings sehr stark davon abhängig, wie groß der Anteil der durch Kurssprünge zu Beginn des Handels induzierten Volatilität ist. Nimmt dieser Anteil einen sehr hohen Wert an, ist der Schätzer von YANG/ZHANG dem CtC-Schätzer unter Effizienzgesichtspunkten nicht überlegen.

Dieser Abschnitt diente dazu, alternative Volatilitätsschätzer beziehungsweise Schätzer der integrierten Varianz, basierend auf Tagesdaten, vorzustellen, wobei jeder der Schätzer versucht mehr oder weniger an Schwachstellen des vorherigen anzusetzen und diese Schwächen auszumerzen. Zu glauben, die Wahl eines geeigneten Schätzers sei somit offensichtlich, ist jedoch weit gefehlt. BRANDT/KINLAY (2005) konnten zeigen, dass die Unterschiede hinsichtlich der Effizienz zwischen den einzelnen Schätzern im Rahmen einer Simulationsanalyse nicht sonderlich signifikant sind, zumindest nicht so, wie man es erwarten würde.¹⁰⁷ Es scheint daher angebracht, bei der Schätzung der integrierten Varianz beziehungsweise der Volatilität nicht bloß auf einen Schätzer zurückzugreifen, sondern mehrere Varianten zu berücksichtigen.

¹⁰⁶Vgl. YANG/ZHANG (2000), S. 482 ff.

¹⁰⁷Vgl. SINCLAIR (2008), S. 25 ff.

5.3.2 Volatilitätsschätzer basierend auf hochfrequenten Daten

5.3.2.1 Die realisierte Volatilität Die *realisierte Volatilität* $RV^{(m)}$ gilt als der Standardansatz für die Schätzung der integrierten Varianz $IV_{0,1}$ auf Basis hochfrequenter Intratagesdaten. Ausgangspunkt ist erneut der Diffusionsprozess (56), jedoch im Gegensatz zu dem vorherigen Abschnitt 3.1 mit einer über das Intervall $[0, 1]$ stochastischen Volatilität σ_t . Geht man davon aus, dass für einen Tag t insgesamt m Intratagesrenditen verfügbar sind, dann bestimmt sich die i -te Intratagesrendite wie folgt:¹⁰⁸

$$r_i^{(m)} = p_{i/m} - p_{(i-1)/m}, i = 1, \dots, m$$

Die realisierte Volatilität ist nun definiert als die Summe der quadrierten Intratagesrenditen:

$$RV^{(m)} = \sum_{i=1}^m r_i^{(m)^2}$$

BARNDORFF-NIELSEN/SHEPARD (2002) zeigen, dass die realisierte Volatilität $RV^{(m)}$ mit zunehmender Frequenz der Datenpunkte eines Intervalls ($m \rightarrow \infty$), bei Zugrundeliegen des Diffusionsprozesses (56), in Wahrscheinlichkeit gegen die integrierte Varianz konvergiert:

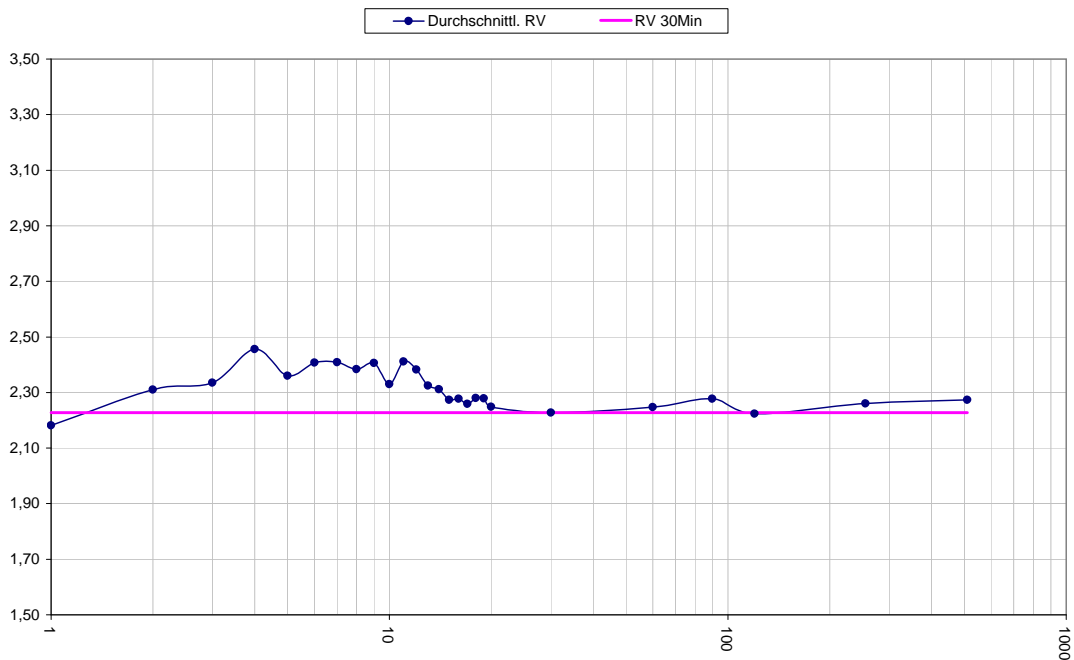
$$RV^{(m)} \xrightarrow{p} IV_{0,1} \text{ mit } m \rightarrow \infty$$

Die realisierte Volatilität konvergiert gegen die quadratische Variation mit einer Konvergenzordnung \sqrt{m} . Für praktische Anwendungen gilt es allerdings zu beachten, dass die Datenfrequenz nicht beliebig hoch gewählt werden kann, da sehr hoch frequentierte Daten anfällig für Marktmikrostruktureffekte (wie z.B. Bid-Ask Sprünge oder Diskretheit von Preisen) sind, die Verzerrungen der realisierten Volatilität nach sich ziehen. Um einen Eindruck davon zu erhalten, welche Frequenz für einen gegebenen Datensatz zu wählen ist, eignen sich die von ANDERSEN et. al (1999) eingeführten Volatilitätssignaturen (volatility signature plots). Hierbei wird die durchschnittliche realisierte Volatilität $\overline{RV^{(m)}}$ gegen die Beobachtungsfrequenz m abgetragen.

¹⁰⁸Vgl. PIGORSCH et. al (2010), S. 2.

Man entscheidet sich dann für diejenige Datenfrequenz, bei der sich die Volatilitätssignatur beginnt zu stabilisieren. Die Anwendung der Volatilitätssignaturen auf den in dieser Arbeit verwendeten hochfrequenten Datensatz, ist in Abbildung 5 dargestellt. Der der Berechnung der realisierten Volatilität zugrunde liegende Datensatz

Abbildung 5: **Volatilitätssignatur der realisierten Volatilität** $RV^{(m)}$.



Die Werte der realisierten Volatilität wurden mit dem Faktor 10.000 multipliziert

erstreckt sich über den Zeitraum vom 02.01.2001 bis zum 29.10.2009. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, sind die Mikrostruktureffekte in dem hier vorliegenden Datensatz vergleichsweise gering. Auf Basis der abgebildeten Volatilitätssignatur wählen wir in dieser Arbeit ein zwischen den Beobachtungen liegendes Zeitintervall von 15 Minuten beziehungsweise dazu korrespondierend $m = 34$.

Die Schätzung der integrierten Varianz über den Zeitraum von 30 beziehungsweise 45 Kalendertagen auf Basis der realisierten Volatilität, erfolgt konzeptionell analog zu den Ausführungen des vorherigen Abschnitts:

$$\hat{\sigma}_{0,N} = \sqrt{a(N) \sum_{j=1}^N RV_j^{(m)}},$$

wobei für den VDAX-New $N = 30$ und für den VDAX $N = 45$ gelte.

5.4 Volatilitätsindizes als Prognose der zukünftigen Volatilität

5.4.1 JENSEN's Ungleichung und der Konvexitätsfehler

Als Prognosewerte der zukünftigen Volatilität verwenden wir die beiden Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New. Wie bereits in Abschnitt 4 angesprochen wurde, gilt der VDAX als Schätzer beziehungsweise laufzeitgewichtete durchschnittliche Schätzung der impliziten BSM-ATMF-Volatilität über den Zeitraum der nächsten 45 Tage. Der VDAX kann demnach als eine Approximation der Volatilitäts-Swap-Rate eines Volatilitäts-Swaps mit einer Laufzeit von $\tilde{T} - t_0 = 45$ Tagen beziehungsweise bei den Subindizes entsprechend der $i = 1, \dots, 8$ Laufzeiten von 1,2,3,6,9,12,18 und 24 Monaten aufgefasst werden:

$$\text{VDAX}_{t_0, \tilde{T}} \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0, \tilde{T}}} | \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{VDAX}_{t_0, T_i} \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0, T_i}} | \mathcal{F}_{t_0} \right]$$

für $i = 1, \dots, 8$, wobei $\mathcal{V}_{t_0, T} := \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \sigma_u^2 du$. Bei dem Indexstand eines VDAX-New-Subindex beziehungsweise des laufzeitunabhängigen Hauptindex, handelt es sich um die positive Quadratwurzel der Varianz-Swap-Rate eines mit einer entsprechenden Laufzeit ausgestatteten Varianz-Swap-Kontrakts.¹⁰⁹ Der quadrierte VDAX-New gilt daher als Approximation der, unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} erwarteten, annualisierten Varianz der Renditen über einen Zeitraum der nächsten $\tilde{T} - t_0 = 30$ Tage beziehungsweise bei Betrachtung der $i = 1, \dots, 8$ Subindizes der kommenden 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 und 24 Monate:

$$\text{VDAX-New}_{t_0, \tilde{T}}^2 \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0, \tilde{T}} | \mathcal{F}_{t_0}] \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{VDAX-New}_{t_0, T_i}^2 \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0, T_i} | \mathcal{F}_{t_0}]$$

für $i = 1, \dots, 8$. Würde man jetzt so vorgehen, beide Volatilitätsindizes analog als eine Prognose der zukünftigen Volatilität in das Regressionsmodell eingehen zu lassen, geht man folglich implizit von der Bedingung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0, T}} | \mathcal{F}_t \right] \approx \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0, T} | \mathcal{F}_t]} \quad (68)$$

¹⁰⁹Dass heißt, es wird die in Volatilitätspunkten angegebene Varianz-Swap-Rate $\sqrt{K_{t_0, T}^{var}} = \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0, T} | \mathcal{F}_{t_0}]}$ quotiert.

aus. Wie zuvor bereits erwähnt, gilt es unter Berücksichtigung der JENSEN'schen Ungleichung für Erwartungswerte allerdings zu beachten, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0,T}} | \mathcal{F}_t \right] \leq \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0,T} | \mathcal{F}_t]} \quad (69)$$

gelten muss. Eine Vernachlässigung des Konvexitätsfehlers würde somit zu verzerrten Ergebnissen führen. Eine Gleichbehandlung von VDAX und VDAX-New Indexstand als Prognose der zukünftigen Volatilität, ist, wie Gleichung (49) suggeriert, nur dann zulässig, wenn man davon ausgeht, dass die zukünftige Volatilität eine konstante beziehungsweise deterministische Größe ist und die Volatilität der Volatilität den Wert Null annimmt. Wir werden uns in dieser Arbeit an dem Ausmaß des empirischen Konvexitätsfehlers, der sich innerhalb des Zeitraumes vom 01.01.1995 bis zum 29.09.2009 im Mittel realisierte, orientieren und gemäß

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0,T}} \right] = 0,93 \cdot \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0,T}]} \Leftrightarrow \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0,T}]} - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0,T}} \right] = 0,07 \cdot \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0,T}]} \quad (70)$$

verfahren. Für die Variable $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{\mathcal{V}_{t_0,T}} \right]$ haben wir uns der impliziten BSM-ATMF-Volatilität über den Zeitraum der nächsten 30 Tage bedient, da der VDAX die impliziten BSM-ATMF-Volatilität einer Restlaufzeit von 45 Tagen abbildet und somit nicht verwendet werden konnte.¹¹⁰ Für Variable $\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathcal{V}_{t_0,T}]}$ konnte auf die Zeitreihe des VDAX-New zurückgegriffen werden. Die statistischen Kennzahlen des empirischen Konvexitätsfehler sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: **Deskriptive Statistik des Konvexitätsfehlers des VDAX-New.**

Mittelwert	0,93
Standardabweichung	0,04
Schiefe	0,56
Kurtosis	10,55
Minimum	0,72
Maximum	1,51
Konfidenzniveau (95%)	0,0012

Beobachtungszeitraum: 02.01.1995-29.10.2009

¹¹⁰Die Daten für die implizite BSM-ATMF-Volatilität ergeben sich aus dem Mittelwert der impliziten BSM-ATMF-Volatilität eines Calls und eines Puts mit einer Restlaufzeit von 30 Tagen (Datenquelle: Bloomberg).

Der VDAX-New geht daher nicht mit vollem Gewicht in die Regression ein, um so dem Konvexitätsfehler Rechnung zu tragen.

5.5 Daten und Deskriptive Statistik

Für die statistische Analyse verwenden wir in dieser Arbeit zum einen historische Daten täglicher Kurse (Open, High, Low, Close) des DAX, des VDAX und des VDAX-New Index über den Zeitraum vom 2. Januar 1992 bis zum 29. Oktober 2009.¹¹¹ Dies entspricht einer Spanne von 6510 Kalendertagen. Zum anderen greifen wir auf die in einem Abstand von 15 Minuten gemessenen Intratageskurse des DAX auf Xetra, dem elektronischen Börsenhandelssystem der Deutsche Börse AG, über den Zeitraum vom 2. Januar 2001 bis zum 29. Oktober 2009 zurück, was einer Spanne von 3222 Kalendertagen entspricht. Die Verwendung von Kalender- anstelle von Handelstagen resultiert daraus, dass die Volatilitätsindizes implizite Volatilitäten beziehungsweise Varianzen über einen Zeitraum der nächsten 30 beziehungsweise 45 Kalendertage abbilden. Zusätzlich zur Betrachtung des Gesamtzeitraumes von etwa 19 beziehungsweise knapp 9 Jahren, sollen durch eine Unterteilung des Gesamtzeitraumes in vier beziehungsweise zwei Subperioden unterschiedliche Volatilitätsregime untersucht werden. In Tabelle 2 sind die insgesamt fünf Betrachtungszeiträume dargestellt:

Tabelle 2: **Beobachtungszeiträume für die Regressionsanalyse.**

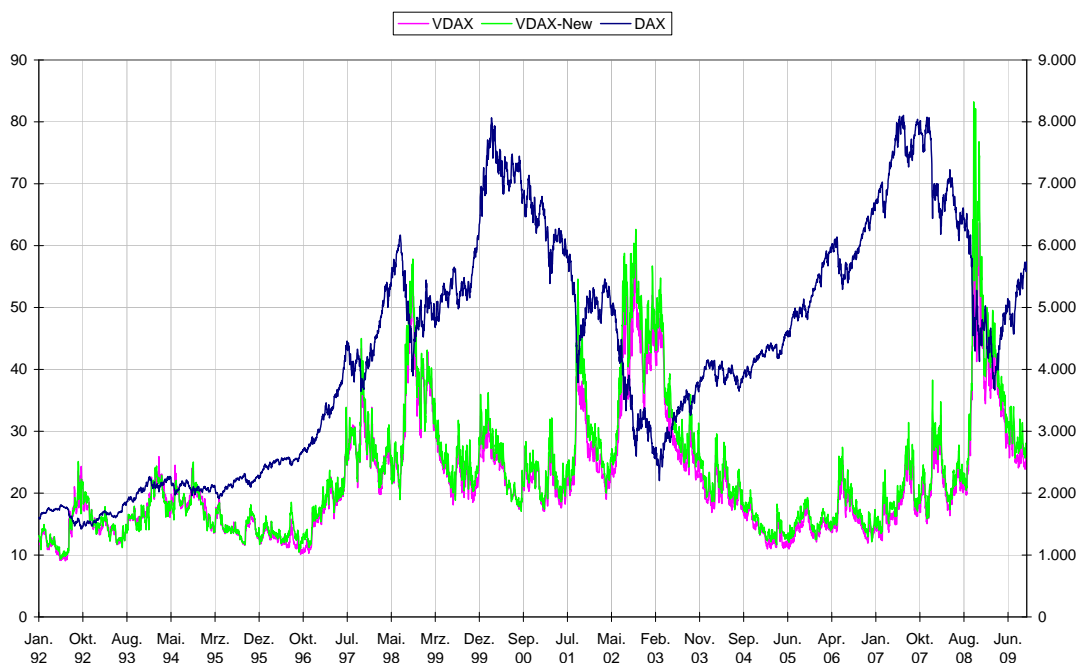
	Zeitraum
Subperiode I	02.01.1992-31.12.1995
Subperiode II	01.01.1996-31.12.2000
Subperiode III	01.01.2001-31.12.2005
Subperiode IV	01.01.2006-29.10.2009
Gesamtzeitraum	02.01.1992-29.10.2009

Abbildung 6 verschafft einen Eindruck der Indexstände des VDAX, VDAX-New und DAX. Es ist zunächst deutlich erkennbar, dass die Volatilität selbst starken Schwankungen unterworfen ist und dass es in den vergangenen 19 Jahren sowohl Zeiträume niedriger Volatilitäts- als auch sehr ausgeprägter Volatilitätsniveaus gab. Die erste Subperiode zeichnet sich durch einen sehr ruhigen Verlauf der Volatilitätsindizes

¹¹¹Die Volatilitätsindizes wurden für die Zeit vor ihrer Einführung von der Deutsche Börse AG zurückgerechnet.

aus. Die drei weiteren Subperioden zeigen deutliche Volatilitätsspitzen und weisen auf einen eher unruhigen Verlauf hin. Dies geht einher mit einem deutlich unruhigeren Verlauf des DAX, der Mitte des Jahres 1997 seinen Ursprung hat und bis heute anhält. Die Subperioden III und IV zeichnen sich insbesondere durch sehr starke Kurseinbrüche aus. Sehr gut ersichtlich ist zudem, das häufig entgegengesetzte Ver-

Abbildung 6: **Verlauf des VDAX, VDAX-New und DAX.**



Quelle: Thomson Reuters Financial Datastream.

halten von Volatilität und Basiswert. Das heißt, steigende beziehungsweise fallende Kursnotierungen im Basiswert gehen meist mit einem Rückgang beziehungsweise Anstieg der Volatilität einher. Dies bestätigt eine Korrelation für den Gesamtzeitraum von -0,63 zwischen dem VDAX und dem DAX und -0,61 zwischen dem VDAX-New und dem DAX.

Die Volatilitätsindizes gehen, wie bereits in Abschnitt 5.2.2 erläutert, als unabhängige Variable in die Regression ein. Die abhängige Variable, die durchschnittliche integrierte Varianz über den Zeitraum von 30 beziehungsweise 45 Kalendertagen, wird aus den historischen DAX Kursen geschätzt. Für diesen Zweck greifen wir auf die im dritten Abschnitt vorgestellten Schätzverfahren zurück. Die Tabellen 3 und 4 zeigen die statistischen Kenngrößen des VDAX respektive VDAX-New sowie der fünf Volatilitätsschätzer innerhalb der verschiedenen Beobachtungszeiträume basierend

auf Tagesdaten. Vergleicht man die Volatilitätsindizes mit den korrespondierenden Volatilitätsschätzern, so fällt auf, dass der VDAX-New in allen Perioden teilweise recht deutlich über der Volatilität liegt. Beim VDAX zeigt sich ein ähnliches Bild. Wie bereits in Abschnitt 5.2.1 kurz angesprochen wurde, deutet diese Beobachtung auf das Vorliegen einer negativen Varianz- beziehungsweise Volatilitätsrisikoprämie des DAX hin. Aus den Tabellen geht zudem hervor, dass der PARKINSON- und der GARMAN/KLASS-Schätzer, im Vergleich zu den anderen Schätzern, vermutlich zu einer Unterschätzung der Volatilität neigen.¹¹² Die Volatilitäten beziehungsweise Volatilitätsschätzer zeigen allesamt eine positive Schiefe sowie eine überwiegend positive Kurtosis, was zu erwarten war, da die Volatilität dazu neigt in Phasen steigender Marktskepsis sprunghaft anzusteigen und sich dann wieder auf niedrigere Niveaus hinbewegt. Die Maxima, sowohl der Volatilitätsindizes als auch der verschiedenen Schätzer, befinden sich in der vierten Subperiode. Diese Periode ist durch die starken Kursverwerfungen und der damit einhergehenden Unsicherheit der Marktteilnehmer, die sich im Zuge der Finanzmarktkrise ereigneten, geprägt.

Die Tabelle 5 zeigt die statistischen Kenngrößen der realisierten Volatilität $RV^{(m)}$ über einen Zeitraum von 30 beziehungsweise 45 Tagen innerhalb der Subperioden III und IV. Die Werte der realisierten Volatilität bewegen sich unterhalb derer des CtC- und des Y/Z-Schätzers und oberhalb der drei anderen Schätzer. Geht man davon aus, dass eine unter Verwendung von hochfrequenten Daten durchgeführte Volatilitätsschätzung präzisere Ergebnisse liefert, neigen die in dieser Arbeit vorgestellten Schätzverfahren auf Basis von Tagesdaten tendenziell eher dazu, die Volatilität eines gegebenen Zeitraumes zu unterschätzen. Anzeichen einer negativen Varianz- beziehungsweise Volatilitätsrisikoprämie des DAX, lassen sich auch bei der Verwendung hochfrequenter Daten beobachten. Hinsichtlich der statistischen Kennzahlen lässt sich noch anführen, dass die Standardabweichung der auf Basis hochfrequenter Daten berechneten realisierten Volatilität nicht sonderlich von denen der fünf auf Tagesdaten basierenden Volatilitätsschätzern abweicht. Bei der Schiefe und Kurtosis sind keine gravierenden Unterschiede zwischen den Schätzern basierend auf Tages- und Hochfrequenzdaten zu beobachten.

¹¹²Vgl. SINCLAIR (2008), S.26 ff.

Tabelle 3: Deskriptive Statistik des VDAX-New und der Volatilitätsschätzer unter Verwendung von Tagesdaten.

	VDAX-New	CtC	Parkinson	G/K	Rogers	Y/Z
Subperiode I						
Mittelwert	15,94	13,94	7,29	6,76	6,62	11,86
Stabw.	3,16	4,05	2,06	1,93	1,93	3,24
Schiefte	0,35	0,27	0,42	0,60	0,69	0,51
Kurtosis	-0,32	-0,29	-0,67	-0,34	-0,23	-0,06
Min	9,35	4,81	3,14	3,30	3,27	5,29
Max	25,12	25,51	13,02	12,87	12,74	20,54
Subperiode II						
Mittelwert	24,32	21,14	16,31	15,90	15,91	19,42
Stabw.	8,52	8,67	8,57	8,53	8,69	8,40
Schiefte	0,88	0,99	0,31	0,34	0,40	1,02
Kurtosis	1,12	1,35	-0,27	-0,22	-0,13	1,55
Min	10,47	5,58	3,12	2,84	2,64	4,92
Max	57,84	53,03	43,18	42,21	41,23	48,63
Subperiode III						
Mittelwert	26,93	24,00	21,40	20,81	20,75	21,77
Stabw.	11,88	13,62	12,53	12,13	12,18	12,42
Schiefte	0,98	1,17	1,12	1,12	1,16	1,29
Kurtosis	0,05	0,55	0,52	0,55	0,73	1,06
Min	11,65	7,81	6,36	6,29	6,28	7,45
Max	62,63	67,90	62,15	60,32	61,79	62,57
Subperiode IV						
Mittelwert	25,47	22,60	19,00	18,67	18,51	20,48
Stabw.	11,91	13,57	11,12	10,79	10,77	12,66
Schiefte	1,89	2,05	2,04	1,99	2,03	2,40
Kurtosis	4,07	4,74	4,65	4,40	4,69	6,84
Min	12,13	7,11	6,64	5,84	5,37	6,85
Max	83,23	82,05	67,42	65,54	66,31	81,84
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	23,42	20,65	16,30	15,83	15,75	18,62
Stabw.	10,47	11,42	10,92	10,72	10,77	10,67
Schiefte	1,59	1,86	1,55	1,50	1,51	2,01
Kurtosis	2,91	4,22	2,81	2,61	2,72	5,39
Min	9,35	4,81	3,12	2,84	2,64	4,92
Max	83,23	82,05	67,42	65,54	66,31	81,84

Tabelle 4: **Deskriptive Statistik des VDAX und der Volatilitätsschätzer unter Verwendung von Tagesdaten.**

	VDAX	CtC	Parkinson	G/K	Rogers	Y/Z
Subperiode I						
Mittelwert	15,93	14,04	7,30	6,76	6,62	11,89
Stabw.	3,36	3,72	1,91	1,81	1,85	3,06
Schiefe	0,29	0,28	0,42	0,59	0,68	0,50
Kurtosis	-0,45	-0,39	-0,57	-0,31	-0,26	-0,28
Min	9,09	5,60	3,88	3,76	3,73	5,86
Max	25,90	24,35	12,04	11,89	11,85	19,76
Subperiode II						
Mittelwert	23,21	21,35	16,44	16,05	16,07	19,60
Stabw.	8,21	8,24	8,36	8,31	8,44	8,04
Schiefe	0,80	0,95	0,17	0,18	0,21	0,81
Kurtosis	1,08	1,31	-0,53	-0,54	-0,56	0,81
Min	10,01	7,41	3,38	3,14	2,95	5,82
Max	56,31	50,95	40,40	39,84	39,63	46,02
Subperiode III						
Mittelwert	24,63	24,16	21,48	20,87	20,80	21,86
Stabw.	10,59	13,32	12,29	11,89	11,91	12,13
Schiefe	0,99	1,07	1,01	1,00	1,02	1,13
Kurtosis	0,17	0,14	0,04	0,03	0,12	0,32
Min	10,98	8,37	7,14	6,97	6,77	8,23
Max	58,25	61,68	55,12	53,14	54,33	55,11
Subperiode IV						
Mittelwert	23,38	22,86	19,18	18,84	18,67	20,69
Stabw.	10,31	13,27	10,89	10,58	10,57	12,43
Schiefe	1,67	1,91	1,89	1,85	1,88	2,19
Kurtosis	2,88	3,81	3,80	3,55	3,69	5,28
Min	11,91	8,57	7,88	7,74	7,44	8,57
Max	74,00	73,75	61,75	60,16	60,29	72,23
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	22,01	20,82	16,39	15,92	15,84	18,74
Stabw.	9,31	11,13	10,76	10,55	10,60	10,43
Schiefe	1,44	1,77	1,44	1,38	1,38	1,85
Kurtosis	2,22	3,57	2,19	1,97	1,99	4,18
Min	9,09	5,60	3,38	3,14	2,95	5,82
Max	74,00	73,75	61,75	60,16	60,29	72,23

Tabelle 5: **Deskriptive Statistik des VDAX-New und VDAX und der korrespondierenden realisierten Volatilität RV unter Verwendung von HF-Daten.**

	VDAX-New		VDAX	
	RV		RV	
Subperiode III				
Mittelwert	26,93	21,68	24,63	21,74
Stabw.	11,88	12,29	10,59	12,06
Schiefe	0,98	1,14	0,99	1,03
Kurtosis	0,05	0,47	0,17	0,05
Min	11,65	6,47	10,98	7,39
Max	62,63	57,96	58,25	55,51
Subperiode IV				
Mittelwert	25,47	20,09	23,38	20,35
Stabw.	11,91	12,11	10,31	11,84
Schiefe	1,89	2,31	1,67	2,11
Kurtosis	4,07	6,21	2,88	4,73
Min	12,13	7,31	11,91	8,22
Max	83,23	75,46	74,00	67,41
Subperiode III+IV				
Mittelwert	26,31	21,06	24,11	21,20
Stabw.	11,85	12,24	10,41	11,99
Schiefe	1,37	1,58	1,27	1,43
Kurtosis	1,69	2,48	1,23	1,66
Min	11,65	6,47	10,98	7,39
Max	83,23	75,46	74,00	67,41

5.6 Regressionsanalyse

5.6.1 MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung von Tagesdaten

Bevor im Folgenden die Ergebnisse der MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung von Tagesdaten präsentiert werden, soll an dieser Stelle noch einmal das Modell in der Form dargestellt werden, wie es im Rahmen der Analyse verwendet wird. Für den VDAX, der als Prognose für die zukünftige Volatilität über einen Zeitraum von 45 Kalendertagen gilt, ergibt sich das Modell gemäß

$$\hat{\sigma}_{t,T} = b_0 + b_1 \cdot \text{VDAX}_{t,T} + e_{t,T} \quad (71)$$

und für den VDAX-New, der als Prognose für die zukünftige Volatilität über einen Zeitraum von 30 Kalendertagen gilt, gemäß

$$\hat{\sigma}_{t,T} = b_0 + b_1 \cdot (0,93 \cdot \text{VDAX-New}_{t,T}) + e_{t,T} \quad (72)$$

Der VDAX-New geht daher nicht mit vollem Gewicht in die Regression ein, um dem Konvexitätsfehler Rechnung zu tragen. Die tatsächlich aufgetretene Volatilität wird auf Basis der in Abschnitt 5.3 vorgestellten Schätzer bestimmt. Im Rahmen der Regressionsanalyse wird sich dann zeigen, für welchen der sechs Schätzer der in Gleichung (59) postulierte Zusammenhang erfüllt ist, d.h. der betrachtete Volatilitätsindex in der Lage ist, eine unverzerrte Vorhersage der zukünftigen Volatilität zu machen und inwiefern sich die Aussagen hinsichtlich des Informationsgehaltes der beiden Volatilitätsindizes von Schätzer zu Schätzer unterscheiden. Die unbekannten Parameter b_0 und b_1 werden mittels des OLS-Verfahrens und die konsistente Varianz-Kovarianz-Matrix nach NEWBY/WEST gemäß den Ausführungen in Abschnitt 5.2.2 geschätzt.

Die Ergebnisse der MINCER/ZARNOWITZ-Regression sind in den Tabellen 6,9,10 und 13 dargestellt. Mit Hilfe von Hypothesentests basierend auf den NEWBY/WEST- t -Statistiken, testen wir bezüglich der Regressionskonstanten die Hypothese

$$H_0 : b_0 = 0, \quad H_1 : b_0 \neq 0$$

und bezüglich der erklärenden Variablen die Hypothesen

$$H_0 : b_1 = 0, \quad H_1 : b_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad H_0 : b_1 = 1, \quad H_1 : b_1 \neq 1 .$$

Eine unverzerrte Vorhersage erfordert, dass die Nullhypothese

$$H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1, \quad H_1 : b_0 \neq 0 \quad \text{und/oder} \quad b_1 \neq 1$$

nicht verworfen werden kann. Zur Überprüfung dieser Hypothese greifen wir in dieser Arbeit auf die robuste WALD-Teststatistik zurück, welche asymptotisch χ^2 -verteilt ist mit $k = 2$ Freiheitsgraden. Für die Irrtumswahrscheinlichkeit wählen wir ein

Niveau von $\alpha = 0,05$.¹¹³ Für den VDAX-New als erklärende Variable zeigt sich

Tabelle 6: Regressionsanalyse des VDAX-New unter Verwendung von Tagesdaten. * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	CtC	Parkinson	G-K	Rogers	Y-Z
Subperiode I					
b_0	3,57	3,88**	3,08*	2,46*	2,16
SE	2,34	1,35	1,22	1,19	1,58
b_1	0,70**†	0,23*††	0,25**††	0,28**††	0,65**††
SE	0,15	0,09	0,08	0,08	0,11
R^2	0,26	0,11	0,14	0,18	0,35
Subperiode II					
b_0	2,59	-2,51	-2,54	-2,36	1,43
SE	1,93	1,97	2,01	2,08	1,81
b_1	0,82**	0,83**	0,82**†	0,81**†	0,80**†
SE	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08
R^2	0,56	0,59	0,57	0,54	0,56
Subperiode III					
b_0	-2,33	-3,33**	-2,98*	-2,91*	-1,62
SE	1,53	1,24	1,20	1,20	1,26
b_1	1,05**	0,99**	0,95**	0,94**	0,93**
SE	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05
R^2	0,73	0,76	0,75	0,73	0,69
Subperiode IV					
b_0	0,75	0,09	0,26	0,21	-0,29
SE	2,07	1,73	1,49	1,44	1,98
b_1	0,92**	0,80**†	0,78**††	0,77**††	0,88**
SE	0,11	0,09	0,08	0,08	0,11
R^2	0,57	0,64	0,64	0,63	0,59
Gesamtzeitraum					
b_0	-0,14	-4,32**	-4,32**	-4,34**	-0,84
SE	0,93	0,90	0,84	0,85	0,81
b_1	0,95**	0,95**	0,93**	0,92**	0,89**†
SE	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05
R^2	0,66	0,71	0,70	0,69	0,66

zunächst einmal, dass dieser innerhalb der ersten, sich durch eine vergleichsweise geringe Schwankungsintensität der Renditen auszeichnende, Subperiode einen eher mäßigen Erklärungsbeitrag leisten kann und eine sehr verzerrte Prognose der zukünft-

¹¹³Näheres zum WALD-Test findet sich etwa in WOOLDRIDGE (2002) oder GREENE (2003).

tigen Volatilität bereitstellt. Die Steigungskoeffizienten bewegen sich in einer Spanne von 0,2300 bis 0,6997 und sind signifikant von Null verschieden. Ein Steigungskoeffizient geringer als eins in Verbindung mit einer positiven Regressionskonstante, deutet darauf hin, dass das verwendete Prognosemodell (in diesem Fall der VDAX-New) zu volatil ist.¹¹⁴ Die Nullhypothese $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ wird für alle der fünf Schätzer abgelehnt, was die Verzerrtheit der Prognosegenauigkeit auf Basis der verschiedenen Volatilitätsschätzer in dieser Subperiode belegt. Auch das R^2 weist über alle Schätzer betrachtet einen vergleichsweise geringen Wert auf.¹¹⁵ Das Bild ändert sich mit Blick auf die anderen Subperioden und auf den Gesamtzeitraum. Zunächst weist der Steigungskoeffizient in allen anderen Subperioden und über alle Volatilitätsschätzer betrachtet deutlich höhere Werte auf, die sich nahe eins bewegen. Der substantielle Einfluss des VDAX-New auf die zukünftige Volatilität ist stets gegeben. Das Bestimmtheitsmaß weist in der Subperiode III bei allen Schätzern seinen im Vergleich zu den anderen Zeiträumen höchsten Werte auf. Insgesamt deuten die Resultate aus den Hypothesentests darauf hin, dass der VDAX-New einen signifikanten Erklärungsbeitrag der zukünftigen Volatilität der kommenden 30 Tage leisten kann, wobei dieser in volatilen Marktphasen (Subperiode III und IV) tendenziell höher ausfällt. Die Hypothese für eine unverzerrte Prognose kann jedoch nur in 2 von 20 Fällen beziehungsweise in 0 von 5 Fällen beibehalten werden (vgl. Tabelle 7). Dieses Resultat deutet daraufhin, dass die Prognosegenauigkeit des VDAX-New bezüglich zukünftiger Volatilitäten verzerrt (nicht erwartungstreu) ist. Die Tabelle 7 fasst die Resultate des Hypothesentests für die verschiedenen Beobachtungszeiträume über alle der fünf Volatilitätsschätzer zusammen.

In Tabelle 8 sind die Auswertungen für die fünf Schätzer der integrierten Varianz als abhängige Variable separat dargestellt. Die Tabelle verdeutlicht, dass der VDAX-New für den klassischen CtC-Schätzer die Bedingung für eine unverzerrte Prognosegenauigkeit noch am ehesten erfüllt. Die Nullhypothese für eine unverzerrte Prognose $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ kann in zwei der vier Subperioden beibehalten werden. Hierbei handelt es sich um die vergleichsweise volatileren Subperioden III und IV. Für den Gesamtzeitraum fällt der Test für eine unverzerrte Prognose für

¹¹⁴Vgl. JORION (1996), S. 520.

¹¹⁵Bei der Interpretation der Ergebnisse gilt es zu beachten, dass die Verwerfung der Nullhypothese $H_0 : b_1 = 1$, nicht notwendigerweise bedeutet, dass das Prognosemodell keinen Informationsgehalt hat.

Tabelle 7: **Hypothesentests für VDAX-New und VDAX.**

Subperioden	$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_1 = 1$	$b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$
VDAX-New	14/20	0/20	10/20	2/20
VDAX	14/20	1/20	7/20	3/20
Gesamtzeitraum	$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_1 = 1$	$b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$
VDAX-New	2/5	0/5	4/5	0/5
VDAX	2/5	0/5	5/5	1/5

Anzahl der Nichtverwerfungen der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$

Tabelle 8: **Hypothesentest $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ für VDAX-New und VDAX.**

Subperioden	CtC	Parkinson	G/K	R/S	Y/Z
VDAX-New	2/4	0/4	0/4	0/4	0/4
VDAX	2/4	0/4	0/4	0/4	1/4
Gesamtzeitraum	CtC	Parkinson	G/K	R/S	Y/Z
VDAX-New	0	0	0	0	0
VDAX	1	0	0	0	0

Anzahl der Nichtverwerfungen der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$

keinen der fünf Schätzer positiv aus. Für die vier Alternativen zum CtC-Schätzer ist die Prognosegenauigkeit des VDAX-New in keinem Fall unverzerrt, was jedoch nicht darauf hindeutet, dass diese einen geringeren Informationsgehalt bezüglich zukünftiger Volatilitätsniveaus bei Verwendung dieser fünf Volatilitätsschätzer suggerieren. Vergleicht man den Erklärungsgehalt des VDAX-New über die fünf Schätzer miteinander, so fällt auf, dass dieser bei Verwendung der Schätzer von PARKINSON und GARMAN/KLASS—mit Ausnahme der ersten Subperiode—tendenziell höher ausfällt, als bei den anderen vier Schätzern. Man sieht also an dieser Stelle, dass eine Aussage hinsichtlich der Prognosegenauigkeit und des Informationsgehaltes des VDAX-New für die zukünftige Volatilität, von dem verwendeten Volatilitätsschätzer abhängt.

Die Resultate im Falle des VDAX unterscheiden sich zunächst nicht sonderlich deutlich von denen des VDAX-New. Der VDAX stellt ebenso wichtige Informationen hinsichtlich der zukünftigen Volatilität bereit. So wird die Nullhypothese $H_0 : b_1 = 0$ in ca. 95% der Fälle verworfen. Genau wie zuvor beim VDAX-New, fällt der Erklärungsbeitrag des VDAX in den volatileren Subperioden III und IV tendenziell höher aus. So nimmt auch hier das Bestimmtheitsmaß in der Subperiode III bei allen Schätzern seinen im Vergleich zu den anderen Zeiträumen höchsten Wert an.

Tabelle 9: **Regressionsanalyse des VDAX unter Verwendung von Tagesdaten.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	CtC	Parkinson	G-K	Rogers	Y-Z
Subperiode I					
b_0	5,82*	4,75**	3,89**	3,30**	3,82*
SE	2,34	1,38	1,27	1,26	1,72
b_1	0,63**†	0,16††	0,18**††	0,21**††	0,51**†
SE	0,13	0,08	0,08	0,08	0,11
R^2	0,22	0,08	0,11	0,14	0,31
Subperiode II					
b_0	4,11*	-1,44	-1,54	-1,37	2,54
SE	1,82	2,15	2,20	2,30	1,78
b_1	0,74**††	0,77**†	0,76**††	0,75**††	0,74**††
SE	0,09	0,09	0,09	0,10	0,08
R^2	0,55	0,57	0,56	0,53	0,56
Subperiode III					
b_0	-1,63	-2,74	-2,38	-2,24	-0,87
SE	1,70	1,46	1,42	1,43	1,50
b_1	1,05**	0,98**	0,94**	0,94**	0,92**
SE	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06
R^2	0,69	0,72	0,71	0,69	0,65
Subperiode IV					
b_0	1,52	0,60	0,69	0,62	0,54
SE	2,23	1,71	1,53	1,53	1,91
b_1	0,91**	0,79**†	0,78**††	0,77**††	0,86**
SE	0,11	0,09	0,08	0,08	0,11
R^2	0,50	0,57	0,57	0,57	0,51
Gesamtzeitraum					
b_0	0,10	-4,19**	-4,21**	-4,22**	-0,65
SE	1,05	1,04	0,99	0,99	0,85
b_1	0,94**	0,94**	0,91**	0,91**	0,88**
SE	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05
R^2	0,66	0,65	0,65	0,64	0,62

Die Steigungskoeffizienten sind in dieser Periode allesamt nicht signifikant von eins verschieden. Die Nullhypothese für eine unverzerrte Prognose $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ kann nur in 15% der Fälle beziehungsweise bei Betrachtung des Gesamtzeitraumes in nur einem Fall beibehalten werden. Dies deutet daraufhin, dass die Prognose-

genauigkeit des VDAX bezüglich der zukünftigen Volatilitäten der kommenden 45 Tage verzerrt ist. Vergleicht man die Bestimmtheitsmaße miteinander, so scheint der VDAX einen etwas geringeren Erklärungsgehalt als der VDAX-New hinsichtlich der korrespondierenden zukünftigen Volatilität leisten zu können. Der VDAX-New ist über alle Perioden und Schätzer betrachtet in der Lage, einen höheren prozentualen Anteil der Gesamtschwankung der zukünftigen Volatilität zu erklären. Zu berücksichtigen ist allerdings, dass der Prognosehorizont im Fall des VDAX um 15 Tage länger ist. Der höchste Informationsgehalt wird auch für den VDAX bei Verwendung der Schätzer von PARKINSON und GARMAN/KLASS suggeriert. Die Prognosegenauigkeit ist jedoch für beide Schätzer stark verzerrt. Aus Tabelle 4 wird ersichtlich, dass der VDAX für den CtC-Schätzer am ehesten für eine unverzerrte Prognose der zukünftigen Volatilität geeignet ist. Die Nullhypothese $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ kann hier in zwei der vier Subperioden beibehalten werden. Auch hier handelt es sich, wie zuvor beim VDAX-New, um die Subperioden III und IV. Bezogen auf den Gesamtzeitraum wird die Nullhypothese für eine unverzerrte Prognose nur im Fall des CtC-Schätzers nicht verworfen.

Um einen Eindruck davon zu erhalten, inwiefern sich die Struktur der vorliegenden Daten auf die Ergebnisse der Regressionsanalyse und der Hypothesentests auswirkt, folgt nun noch einmal eine analoge Untersuchung, jedoch unter Verwendung nicht-überlappender täglicher Daten. Dadurch reduziert sich der Umfang der Stichprobe zwar deutlich, was aber aufgrund des langen Beobachtungszeitraumes von 1992-2009 immer noch einen Datensatz von 217 (VDAX-New) beziehungsweise 144 (VDAX) Datenpunkten zulässt. Eine Aufteilung in Subperioden erscheint unter diesen Umständen jedoch nicht länger sinnvoll. Die Ergebnisse für den VDAX-New und den VDAX sind der Tabelle 10 beziehungsweise den Tabellen 11 und 12 zu entnehmen. Wie zu sehen ist, unterscheiden sich die Ergebnisse bei Verwendung nicht-überlappender Daten nur geringfügig von denen bei Verwendung überlappender Daten. Der Steigungskoeffizient nimmt geringfügig höhere Werte näher eins an, wodurch die Verzerrtheit der Modelle geringfügig reduziert wird. Die Auswertung der Hypothesentest $H_0 : b_1 = 0$ deutet erneut auf den signifikanten Informationsgehalt des VDAX-New hin. Die Nullhypothese für eine unverzerrte Prognose $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ kann nur im Falle des CtC-Schätzers beibehalten werden. Die

Tabelle 10: **Regressionsanalyse des VDAX-New und VDAX bei sich nicht überlappenden (Tages-)Daten.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,01$.

VDAX-New	CtC	Parkinson	G-K	Rogers	Y-Z
Gesamtzeitraum					
b_0	-0,87	-4,66**	-4,58**	-4,52**	-0,93
SE	1,15	1,06	1,05	1,08	1,12
b_1	1,00**	0,97**	0,95**	0,94**	0,90**
SE	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
R^2	0,66	0,68	0,67	0,66	0,62
VDAX	CtC	Parkinson	G-K	Rogers	Y-Z
Gesamtzeitraum					
b_0	-0,40	-4,48**	-4,48**	-4,48**	-0,84
SE	1,51	1,41	1,38	1,40	1,43
b_1	0,97**	0,95**	0,93**	0,92**	0,89**
SE	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
R^2	0,62	0,64	0,64	0,63	0,60

Tabelle 11: **Hypothesentests für VDAX-New und VDAX bei sich nicht überlappenden Daten.**

	$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_1 = 1$	$b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$
VDAX-New	2/5	0/5	5/5	1/5
VDAX	2/5	0/5	5/5	1/5

Anzahl der Nichtverwerfungen der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$

Regression unter Verwendung der Schätzer von PARKINSON und GARMAN/KLASS weist auch hier den höchsten Erklärungsbeitrag des VDAX-New gemessen am R^2 auf.

Tabelle 12: **Hypothesentest $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ für VDAX-New und VDAX bei sich nicht überlappenden Daten.**

	CtC	Parkinson	G/K	R/S	Y/Z
VDAX-New	1	0	0	0	0
VDAX	1	0	0	0	0

Anzahl der Nichtverwerfungen der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$

Auch im Fall des VDAX nimmt der Steigungskoeffizient jetzt geringfügig höhere Werte näher eins an. Die Resultate der Hypothesentests unterscheiden sich sonst nicht von denen bei Verwendung überlappender Daten. Analog zu der vorherigen

Analyse zeigt sich, dass der VDAX-New, gemessen am R^2 , einen etwas höheren Erklärungsgehalt hinsichtlich der für ihn relevanten zukünftigen Volatilität bereitstellt. Die Ergebnisse deuten im Falle beider Volatilitätsindizes auf eine verzerrte Prognosegenauigkeit zukünftiger Volatilitäten hin. Die Struktur der hier vorliegenden Daten hat daher keine deutlichen Einflüsse auf die Ergebnisse der MINCER/ZARNOWITZ-Regression.

5.6.2 MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung von Hochfrequenzdaten

In diesem Abschnitt widmen wir uns nun der MINCER/ZARNOWITZ-Regression basierend auf hochfrequenten Daten. Die Verfügbarkeit der Daten reicht bis zum Januar 2001 zurück, so dass jetzt noch die zwei Subperioden III und IV sowie der Gesamtzeitraum 02.01.2001-29.10.2009 betrachtet werden können. Die Vorzüge hochfrequenter Daten liegen in erster Linie in einer (theoretisch) höheren Präzision hinsichtlich der Schätzung der integrierten Varianz. Hinzu kommt, dass die Schätzungen der OLS-Parameter mit zunehmender Varianz von $(\sigma_{t,T} - \hat{\sigma}_{t,T})^2$ ungenauer werden, so dass die Verwendung von Hochfrequenzdaten und die damit verbundene höhere Präzision empfehlenswert erscheint.¹¹⁶ HANSEN/LUNDE (2006) unterstützen diese Ansicht, indem sie darauf hinweisen, dass die Verwendung eines Schätzers (Volatilitätsproxies) für eine latente Variable, zu falschen Rückschlüssen bezüglich der Beurteilung der Prognosegüte beziehungsweise des Informationsgehaltes unterschiedlicher Volatilitätsmodelle (hier des VDAX und VDAX-New) führen kann. Die höhere Präzision bei der Verwendung von Daten hoher Frequenzen, in Verbindung mit einem konsistenten Beurteilungskriterium wie die hier angewandte Form der MINCER/ZARNOWITZ-Regression, sorgt dafür, dass eine konsistente Anordnung konkurrierender Volatilitätsmodelle gewährleistet werden kann.¹¹⁷

Es gilt im Folgenden der Frage nachzugehen, inwiefern sich die Ergebnisse der MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung von Hochfrequenzdaten von denen aus dem vorherigen Abschnitt unterscheiden. Die Schätzung der integrierten Varianz beschränkt sich im Weiteren auf die Verwendung des in Abschnitt 5.3.2.1

¹¹⁶Vgl. PATTON/SHEPPARD (2007), S. 4.

¹¹⁷Vgl. HANSEN/LUNDE (2006), S. 98 ff. Die Autoren zeigen, dass eine MINCER/ZARNOWITZ-Regression unter Verwendung logarithmierter Werte zu einer nicht konsistenten Anordnung konkurrierender Volatilitätsmodelle auf Basis des R^2 führt.

vorgestellten Ansatzes der realisierten Volatilität. Die Schätzung der integrierten Varianz eines Tages bestimmt sich hierbei, wie bereits erwähnt, aus der Summe der quadrierten Intradagesrenditen, die jeweils über einen Zeitraum von 15 Minuten gemessen wurden.

Die Ergebnisse der MINCER/ZARNOWITZ-Regression sind in der Tabelle 13 dargestellt. In Tabelle 14 findet sich die Auswertung der Hypothesentests.

Tabelle 13: Regressionsanalyse des VDAX-New und VDAX unter Verwendung von HF-Daten. * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,01$.

VDAX-New	RV	VDAX	RV
Subperiode III			
b_0	-2,51*	b_0	-1,90
SE	1,19	SE	1,41
b_1	0,97**	b_1	0,96**
SE	0,05	SE	0,05
R^2	0,75	R^2	0,71
Subperiode IV			
b_0	0,26	b_0	1,39
SE	1,85	SE	1,79
b_1	0,80**	b_1	0,78**†
SE	0,10	SE	0,10
R^2	0,59	R^2	0,50
Subperiode III+IV			
b_0	-1,34	b_0	-0,59
SE	1,16	SE	1,24
b_1	0,90**	b_1	0,90**
SE	0,06	SE	0,06
R^2	0,69	R^2	0,63

Für den VDAX-New als erklärende Variable lässt sich zunächst feststellen, dass sich der Steigungskoeffizient sowohl in Subperiode III als auch in Subperiode IV innerhalb des Wertebereichs der Steigungskoeffizienten bei der Verwendung von Tagesdaten befindet. Die Nullhypothese $H_0 : b_1 = 1$ kann in allen drei Perioden beibehalten werden. Die Anzahl der Verwerfungen der Nullhypothese $H_0 : b_1 = 0$ deutet weiterhin auf einen wichtigen Informationsgehalt des VDAX-New hin. Das Bestimmtheitsmaß weist insbesondere in der dritten Subperiode einen recht hohen Wert auf, was auf einen höheren Informationsgehalt des Modells, basierend auf hochfrequenten Daten,

deutet. In der Subperiode IV fallen die Ergebnisse dahingehend anders aus, als dass der Erklärungsgehalt der MINCER/ZARNOWITZ-Regression nun geringer ausfällt. Die Hypothese für eine unverzerrte Vorhersage kann weder für die beiden einzelnen Subperioden noch für den aggregierten Zeitraum beibehalten werden. Diese Resultate deuten daraufhin, dass die Prognosegenauigkeit des VDAX-New auch bei Verwendung hochfrequenter Daten—auf Basis der realisierten Volatilität—verzerrt ist.

Tabelle 14: **Hypothesentests für VDAX-New und VDAX unter Verwendung von HF-Ddaten.**

Subperioden	$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_1 = 1$	$b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$
VDAX-New	1/2	0/2	2/2	0/2
VDAX	2/2	0/2	1/2	0/2
Gesamtzeitraum	$b_0 = 0$	$b_1 = 0$	$b_1 = 1$	$b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$
VDAX-New	1/1	0/1	1/1	0/1
VDAX	1/1	0/1	1/1	0/1

Anzahl der Nichtverwerfungen der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$

Für den VDAX ergibt sich ein ähnliches Bild. Auch hier bewegt sich der Steigungskoeffizient sowohl in Subperiode III als auch in Subperiode IV innerhalb des bei der Verwendung von Tagesdaten aufgespannten Wertebereichs. Die Nullhypothese $H_0 : b_1 = 0$ wird stets verworfen, was suggeriert, dass der VDAX wichtige Informationen hinsichtlich der zukünftigen Volatilität bereitstellt. Für das Bestimmtheitsmaß gilt, dass dieses in der vergleichsweise volatileren Subperiode III höhere Werte aufweist und bei Verwendung hochfrequenter Daten einen höheren Informationsgehalt des VDAX suggeriert. Der Test auf Unverzerrtheit der Prognose fällt ebenfalls negativ aus.

Festzuhalten bleibt, dass sich die Ergebnisse der MINCER/ZARNOWITZ-Regression auf Basis unterschiedlicher Datenfrequenzen, nicht grundlegend voneinander unterscheiden. Die Ergebnisse der Regression, die in diesem Abschnitt unter Verwendung von hochfrequenten Daten für die Schätzung der integrierten Varianz durchgeführt wurde, suggerieren weiterhin, dass die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New einen wichtigen Informationsgehalt hinsichtlich der zukünftigen Volatilität bereitstellen, bei beiden aber die Prognosegenauigkeit bezüglich der korrespondierenden zukünftigen Volatilität verzerrt ist. Vergleicht man den Informationsgehalt beider

Volatilitätsindizes anhand des R^2 der Regressionen miteinander, fallen die Ergebnissen analog zu denen bei der Verwendung von Tagesdaten aus. Der VDAX-New ist in der Lage, einen höheren prozentualen Anteil der Gesamtschwankung der korrespondierenden Volatilität zu erklären als der VDAX, was somit auf einen höheren Informationsgehalt hindeutet. In Subperiode III fällt das Bestimmtheitsmaß unter Verwendung hochfrequenter Daten höher aus als auf der Basis von Tagesdaten. In Subperiode IV verhält es sich genau umgekehrt.

Um den Informationsgehalt und die Prognosegenauigkeit der Volatilitätsindizes basierend auf Hochfrequenzdaten weiter zu analysieren, bietet es sich für zukünftige Untersuchungen an, bei der Schätzung der integrierten Varianz auf speziell für diese hohen Datenfrequenzen entwickelte Schätzer zurückzugreifen. Die in MCALEER/MEDEIROS (2008) und PIGORSCH et. al (2010) diskutierten Verfahren stellen hierfür einen guten Ansatz dar. Es ist gut möglich, dass eine akkuratere Verarbeitung hochfrequenter Daten zu abweichenden Ergebnissen führt.

5.6.3 Interpretation der Ergebnisse

Vergleicht man den Informationsgehalt der beiden Volatilitätsindizes, so lässt sich abschließend sagen, dass der VDAX-New dem VDAX, auf Grundlage des über alle Perioden und Schätzer betrachteten Erklärungsgehaltes, gegenüber überlegen zu sein scheint. Unabhängig von der vorliegenden Datenfrequenz und Verwendung verschiedener Volatilitätsproxies hat sich gezeigt, dass, sowohl für den VDAX als auch für den VDAX-New, die Prognosegenauigkeit bezüglich zukünftiger Volatilitäten verzerrt ist. Die konkreten Gründe für diese Beobachtung lassen sich nur schwer ausmachen. Ein wichtiger Aspekt hinsichtlich des höheren Informationsgehaltes des VDAX-New ist wohlmöglich der unterschiedlich lange Zeitraum über den sich die Prognose in den beiden Fällen erstreckt. Eine Prognose, über einen Zeitraum von 45 Tagen sollte unsicherer beziehungsweise ungenauer sein, als dies für einen Zeitraum von 30 Tagen der Fall ist. Hinsichtlich der Verwendung unterschiedlicher Datenfrequenzen scheint eine präzisere Schätzung der integrierten Varianz zwar zeitweise einen höheren Informationsgehalt der beiden Volatilitätsindizes zu suggerieren, jedoch kann gleichzeitig auch das Ausmaß der Verzerrtheit, wenn auch nur geringfügig, zunehmen. Dies steht im Gegensatz zu den Ergebnissen von POTESHMAN (2000).

POTESHMAN (2000) argumentiert, dass die Verwendung von Tagesdaten beziehungsweise geringfrequentierter Daten (sowie ein misspezifiziertes Optionspreismodell) zu deutlichen Verzerrungen der Prognosegenauigkeit impliziter Volatilitäten führt. Er zeigt, dass, entgegen der hier gemachten Beobachtungen, implizite Volatilitäten bei der Verwendung hochfrequenter Daten für die Schätzung der integrierten Varianz beziehungsweise der Volatilität, eine erheblich höhere Prognosegenauigkeit zukünftiger Volatilitäten für den US-amerikanischen Aktienmarkt (S&P 500 Index) liefern können und der Erklärungsgehalt der Modelle ebenfalls zunimmt. Dies muss aber nicht notwendigerweise auch für den deutschen Aktienmarkt gelten.

Inwiefern sich die hier geschilderten Beobachtungen auf die unterschiedlichen Kalkulationsmethoden der Volatilitätsindizes zurückführen lassen, ist anhand der Daten nicht auszumachen. Dem Korrekturfaktor des VDAX-New kommt sicherlich eine entscheidende Bedeutung zu. Der in dieser Arbeit angenommene Wert von 0,93 scheint jedoch, aufgrund des für dessen Berechnung verwendeten Beobachtungszeitraumes von knapp 15 Jahren, als Schätzwert angemessen zu sein, wobei dieser im Zeitablauf durchaus auch größeren Schwankungen unterworfen ist. Es sollte zudem beachtet werden, dass, wie bereits in Abschnitt 4.2.1 und 4.2.2 ausgeführt wurde, die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New eine Approximation der erwarteten zukünftigen Volatilität (ggf. unter Berücksichtigung des Konvexitätsfehlers) unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} darstellen, diese Beziehung aber nicht notwendigerweise auch unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} gelten muss. Wie in Abschnitt 5.2.1 bereits angesprochen wurde, stimmen die Erwartungen der zukünftigen Volatilität (ggf. unter Berücksichtigung des Konvexitätsfehlers) unter dem Maß \mathbb{P} und \mathbb{Q} nur dann überein, wenn keine Varianz- beziehungsweise Volatilitätsrisikoprämie im Markt eingepreist ist. Da diese Risikoprämie nicht beobachtbar ist und somit auch nicht explizit in der Regression berücksichtigt werden kann, wird sich eine von Null verschiedene Risikoprämie zwangsläufig in Regressionsergebnissen widerspiegeln. Der Steigungskoeffizient in der MINCER/ZARNOWITZ-Regression wird dann tendenziell nach unten verzerrt sein.¹¹⁸ Zudem sollte berücksichtigt werden, dass es sich, zumindest im Fall des VDAX, um eine auf dem Optionspreismodell von BSM basierende implizite Volatilität handelt und so eine Missspezifikation des zugrunde

¹¹⁸Vgl. ANDERSON et. al (2007), S. 15 ff.

liegenden Modells nicht ausgeschlossen werden kann. Da der VDAX-New nicht von einem bestimmten Optionspreismodell abhängig ist,¹¹⁹ scheint dieser dem VDAX zumindest in diesem Punkt überlegen zu sein.

Es bleibt festzuhalten, dass die Verwendung verschiedener Volatilitätsschätzer zu unterschiedlichen Ergebnissen hinsichtlich des Informationsgehaltes und, in geringerem Maße, auch der Prognosegenauigkeit impliziter Volatilitäten führt. Die Schätzer von PARKINSON, GARMAN/KLASS und ROGERS/SATCHELL scheinen auf Grundlage des R^2 am besten geeignet zu sein, einen Informationsgehalt des VDAX-New beziehungsweise VDAX widerzuspiegeln. Allerdings ist die Prognosegenauigkeit für diese Schätzer stark verzerrt, was etwa für den CtC-Schätzer weniger zutrifft.

5.7 Zusammenfassung

Das Ziel dieses Kapitels bestand darin, zu untersuchen, inwieweit die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG einen Beitrag zur Prognose der zukünftigen Volatilität leisten können. Für die Schätzung der Volatilität wurden in dieser Arbeit fünf Alternativen zum klassischen CtC-Schätzer verwendet. Dabei galt es insbesondere zu überprüfen, inwiefern der Informationsgehalt und die Prognosegenauigkeit der Volatilitätsindizes durch die Auswahl des Volatilitätsschätzers beeinflusst wird. Die Analyse wurde sowohl mit Tagesdaten als auch mit hochfrequenten Daten im zeitlichen Abstand von 15 Minuten durchgeführt.

Nachdem in den Abschnitten 5.2, 5.3 und 5.4 zunächst die wichtigsten Grundlagen und die Motivation für die weitere Analyse dargelegt wurden, ging es in Abschnitt 5.5, 5.6 und 5.7, dem eigentlichen Kern der Arbeit, darum aufzuzeigen, inwiefern der VDAX und VDAX-New einen Informationsbeitrag hinsichtlich zukünftiger Volatilitäten beinhalten und wie dieser Beitrag von dem verwendeten Volatilitätsschätzer abhängt.

Abschließend lässt sich sagen, dass der VDAX-New, basierend auf Tagesdaten, eher in der Lage ist, Informationen bezüglich zukünftiger Volatilitätsniveaus bereitzustellen. Der höchste Informationsgehalt ergibt sich im Falle des VDAX-New tendenziell dann, wenn zur Schätzung der Volatilität die Schätzer von PARKINSON, GARMAN/KLASS und ROGERS/SATCHELL verwendet werden. Allerdings ist die

¹¹⁹Vgl. Abschnitt 4.2.2.

Prognosegenauigkeit für diese Schätzer stark verzerrt. Der VDAX beinhaltet einen etwas geringeren Informationsgehalt bezüglich der korrespondierenden zukünftigen Volatilität, was jedoch nicht sonderlich überraschend ist, wenn man berücksichtigt, dass dieser sich auf einen um 15 Tage längeren zukünftigen Zeitraum bezieht. Werden für die Analyse Hochfrequenzdaten herangezogen, fallen die Ergebnisse nicht deutlich anders aus. Die realisierte Volatilität suggeriert auch in diesem Fall einen recht hohen Informationsgehalt, die Prognosegenauigkeit ist jedoch verzerrt. Sowohl auf Basis von Tagesdaten als auch auf Basis hochfrequenter Daten, lässt sich somit festhalten, dass die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New einen wichtigen Informationsbeitrag hinsichtlich der zukünftigen Volatilität leisten, die Genauigkeit der Prognose der zukünftigen Volatilität aber in den meisten Fällen verzerrt ist. Es wurde deutlich, dass Aussagen bezüglich des Informationsgehaltes der Volatilitätsindizes von dem Schätzer der Volatilität und in geringem Maße auch von der Frequenz der verwendeten Daten abhängen.

6 Eine empirische Analyse von Varianzrisikoprämien mit Hilfe nationaler Volatilitätsindizes

6.1 Vorbemerkungen

Die Renditevarianz spielt in der Kapitalmarktforschung seit Mitte des 19. Jahrhunderts eine bedeutende Rolle. Sie ist für eine Vielzahl theoretischer und praktischer Anwendungen von sehr wichtiger Bedeutung.¹²⁰ Konnte man sich lange Zeit mit dem Gedanken anfreunden, dass die Renditevarianz im Zeitablauf konstant respektive deterministisch ist, so ist es heute Konsens, dass die Renditevarianz selbst mit Unsicherheit behaftet und somit als eine stochastische Variable aufzufassen ist. Dieses in der Varianz inhärente Risiko sollte sich dann konsequenterweise auch in den Preisen von Finanztiteln niederschlagen. Für einen Anleger bedeutet dies, dass er sich neben der Unsicherheit über die zukünftigen Renditen auch der Unsicherheit über die Varianz der zukünftigen Renditen eines Finanztitels ausgesetzt sieht.¹²¹ Von Interesse scheint somit die Frage, wie Marktteilnehmer diese Unsicherheit bezüglich der Varianz der zukünftigen Renditen bewerten und ob das Varianzrisiko als eigenständiger Risikofaktor betrachtet werden kann.

Um sich gegen die Unsicherheit hinsichtlich der Entwicklung der zukünftigen Renditevarianz abzusichern, kam es in den neunziger Jahren zu der Einführung zahlreicher Varianz- beziehungsweise Volatilitätsderivate. Bei dieser Klasse von Derivaten handelt es sich um Finanzinstrumente, deren Wertentwicklung von der über einen bestimmten Zeitraum aufgetretenen Schwankungsintensität der Renditen eines zugrunde liegenden Basiswertes abhängt. Das Kursniveau wirkt sich dabei nicht auf den Wert des Derivats aus. Das heute am meisten gehandelte Volatilitätsderivat ist der Varianz-Swap. Ein Varianz-Swap ist ein Forward-Kontrakt, welcher dem Käufer bei Laufzeitende die Differenz zwischen der annualisierten quadratischen Variation und der vorab vereinbarten Varianz-Swap-Rate auszahlt. Da der Kontrakt bei Abschluss einen Wert von Null hat, stimmt der Forward-Preis beziehungsweise die Varianz-Swap-Rate mit dem Erwartungswert der Varianz beziehungsweise der quadratischen Variation unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} überein. Ein entscheidendes

¹²⁰Hierbei handelt es sich etwa um die Bewertung von Optionskontrakten als auch eine Reihe wichtiger Entscheidungsprozesse im Portfolio- und Risikomanagement.

¹²¹Vgl. CARR/WU (2006a), S. 21.

Merkmal des Varianz-Swaps ist es, dass die Bestimmung der Swap-Rate und die zur Replikation des Kontraktes gehörige Handelsstrategie nicht von der Wahl eines spezifischen Modells für die Entwicklung der zukünftigen Volatilität abhängig ist.¹²² Indexbetreiber wie die Deutsche Börse AG, die amerikanische CBOE und die NYSE Euronext entschlossen sich, diesen robusten Bewertungsansatz für die Berechnung ihrer eigenen Volatilitätsindizes zu übernehmen. Bei dem Indexstand dieser Volatilitätsindizes handelt es sich (approximativ) um die Quadratwurzel der Varianz-Swap-Rate eines Varianz-Swap-Kontrakts auf dem jeweils zugrunde liegenden Index. Für die Ermittlung der Varianzrisikoprämie wählen wir in dieser Arbeit den in der Literatur mittlerweile gängigen Ansatz, diese aus der Differenz zwischen der ex post aufgetretenen Varianz und der Varianz-Swap-Rate beziehungsweise dem quadrierten Volatilitätsindex zu bestimmen. Wir betrachten hierbei die Varianzrisikoprämien von insgesamt sechs verschiedenen nationalen Aktienindizes. Hierbei handelt es sich um den AEX aus den Niederlanden, den belgischen BEL 20, den CAC 40 aus Frankreich, den britischen FTSE 100, den DAX aus Deutschland sowie den US-amerikanischen S&P 500.

Im Rahmen dieser Arbeit soll auf Basis der Volatilitätsindizes dieser sechs Länder das Vorliegen von Varianzrisikoprämien und deren Charakteristika sowie der Zusammenhang zwischen Varianzrisikoprämien und Kreditausfallrisiken (in Form von Credit Default Swap-Rates) untersucht werden. Zu Beginn soll zunächst dargelegt werden, wie mit Hilfe der Volatilitätsindizes eine robuste Schätzung der Varianzrisikoprämien des zugrunde liegenden Marktes durchgeführt werden kann. Es wird gezeigt, dass die Varianzrisikoprämie durch die Differenz zwischen der ex post geschätzten integrierten Varianz und dem quadrierten Volatilitätsindex bestimmt ist. In der anschließenden empirischen Untersuchung gilt es zu überprüfen, ob (signifikante) Varianzrisikoprämien in den hier ausgewählten Märkten vorliegen und falls ja, ob diese mit einem Gleichgewichtsmodell wie dem CAPM erklärt werden können. Mittels einer MINCER/ZARNOWITZ-Regression soll zudem der Frage nachgegangen werden, ob die Varianzrisikoprämien im Zeitablauf konstant oder variabel sind. Des Weiteren wird untersucht, welchen Informationsgehalt die Varianzrisikoprämien hinsichtlich der Erklärung von Kreditausfallrisiken der sechs ausgewählten

¹²²Es sind folglich keinerlei Annahmen bezüglich des Volatilitätsprozesses nötig. Vgl. Abschnitt 3.3.

Länder leisten können. Ausgangspunkt hierfür ist die Beobachtung, dass Varianzrisikoprämien auch die in Aktien- und Anleiherenditen sowie Credit Spreads eingepreiste Unsicherheit hinsichtlich zukünftiger makroökonomischer Entwicklungen enthalten.¹²³ COLLIN-DUFRESNE et. al (2001) betrachten zahlreiche Proxies für Ausfall- und Wiedereinbringungsrisiken und kommen zu dem Ergebnis, dass diese etwa 25% der beobachteten Veränderungen von Credit Spreads erklären können. CARR/WU (2006b) betrachten den Zusammenhang zwischen impliziten Optionsvolatilitäten¹²⁴ und Credit Default Swaps ebenfalls auf Unternehmensebene und kommen dabei auf ein R^2 von 36% bis zu 83%.

Es existieren bis heute bereits einige Arbeiten, die sich mit der Analyse von Varianzrisikoprämien beschäftigt haben. So betrachten etwa BAKSHI/KAPADIA (2003a,b) in einer der ersten Arbeiten zu diesem Thema den Gewinn und Verlust aus einer Delta-neutralen Absicherung einer Long-Position in einer Call-Option, um dadurch qualitative Rückschlüsse über die Varianzrisikoprämie zu ziehen. Für den S&P 500 finden die Autoren eine negative Risikoprämie, deren Ausmaß in Zeiten erhöhter Marktvolatilität zunimmt und einen signifikanten Einfluss auf den Ertrag aus Delta-gehedgten Optionsposition hat. Eine negative Varianzrisikoprämie deutet darauf hin, dass Marktteilnehmer eine erhöhte Marktvolatilität als ungünstig erachten und bereit sind, eine Prämie dafür zu bezahlen, sich gegen dieses Risiko abzusichern (etwa durch den Erwerb von Varianz-Swaps). Im Allgemeinen kompensiert eine Risikoprämie risikoaverse Investoren für mögliche Ergebnisschwankungen. So verlangen risikoaverse Investoren eine positive Risikoprämie für das einer Investitionsalternative inhärente Renditerisiko. Je höher die Unsicherheit über die zukünftigen Renditen ist, desto höher sollte die Kompensation für diese Unsicherheit ausfallen. Die empirisch beobachtbaren negativen Varianzrisikoprämien deuten nun darauf hin, dass risikoaverse Investoren eine geringere erwartete Renditevarianz als eine Kompensation für ein erhöhtes Varianzrisiko fordern. Risikoaverse Investoren scheuen somit nicht nur die Unsicherheit über die zukünftigen Renditen sondern auch über die Varianz der zukünftigen Renditen.¹²⁵ CARR/WU (2004) und CARR/WU (2009a) untersuchen in ihrer Arbeit auf Basis von fünf US-amerikanischen Aktienindizes sowie 35 Einzelak-

¹²³Vgl. ZHOU (2010), BOLLERSLEV et al. (2008).

¹²⁴Konkret handelt es sich hierbei um die ATMF-Volatilität und um ein Maß für die Schiefe der aus den Optionspreisen impliziten Verteilung.

¹²⁵Vgl. CARR/WU (2006a), S. 21.

tien das historische Verhalten der Varianzrisikoprämien auf dem US-amerikanischen Aktienmarkt. Die Ermittlung der Varianzrisikoprämie ist analog zu der in diesem Beitrag gewählten Methode, wobei die Autoren mit Hilfe von synthetischen Varianz-Swap-Rates¹²⁶ und der ex post aufgetretenen Varianz Rückschlüsse über das Vorliegen von Varianzrisikoprämien ziehen. Die Autoren finden eine signifikante negative Varianzrisikoprämie für alle fünf Aktienindizes. Des Weiteren kommen sie zu dem Schluss, dass ein systematischer Varianzrisikofaktor im Aktienmarkt existiert, der nach einer entsprechend negativen Risikoprämie verlangt. BONDARENKO (2004) führt eine ähnliche Untersuchung auf Basis hochfrequenter Daten durch und zeigt anhand einiger Beispiele die wichtige Rolle, die dem Varianzrisiko in einer Ökonomie zukommt. BONDARENKO (2004) findet ebenfalls eine signifikant negative Varianzrisikoprämie für den S&P 500, die weder mit Hilfe gängiger Risikofaktoren noch durch Optionsrenditen erklärt werden kann. Für den deutschen beziehungsweise europäischen Aktienmarkt existieren weitaus weniger Forschungsarbeiten. Hier ist einzig und allein der Beitrag von HAFNER/WALLMEIER (2006) zu nennen. Die Autoren untersuchen zum einen die Beziehung zwischen (synthetischen) Varianz-Swap-Renditen und den Renditen der beiden Aktienindizes DAX und EuroStoxx50, und gehen zum anderen der Frage nach, wie ein Investor Varianz-Swap-Kontrakte in sein Portfolio-Optimierungsproblem miteinbeziehen sollte. HAFNER/WALLMEIER (2006) zeigen, dass eine aus Diversifikationsgesichtspunkten zunächst aussichtsreich erscheinende Long-Position in Varianz-Swaps, aufgrund einer signifikant negativen Varianzrisikoprämie, nicht empfehlenswert erscheint. Die Short-Position in Varianz-Swaps stellt sich dagegen als eine recht profitable Handelsstrategie heraus. Die Resultate des Backtestings zur optimalen Portfolioauswahl schlagen ebenfalls eine Short-Position in Varianz-Swap-Kontrakten vor. Der vorliegende Beitrag ergänzt die bereits bestehende Literatur in der Hinsicht, als dass bislang nur sehr wenige Forschungsarbeiten zum deutschen und europäischen Aktienmarkt existieren. Auf Basis aller seit dem Jahr 2000 verfügbaren Volatilitätsindizes,¹²⁷ die auf der Basis von Varianz-

¹²⁶Die Autoren greifen hierbei auf historische Optionspreise und die Berechnungsvorschrift für die Varianz-Swap-Rate $K_{t,T}^{var}$ aus Abschnitt 3.3 zurück.

¹²⁷Für den US-amerikanischen Markt existieren mit dem VXN auf den Nasdaq 100 und dem VXD auf den Dow Jones Industrial Average noch zwei weitere US-amerikanische Volatilitätsindizes, die jedoch nicht mit in die Analyse einbezogen wurden. Der schweizerische VSMI Volatilitätsindex wurde aufgrund mangelnder Daten zu den Kreditausfallrisiken der Schweiz nicht mit in die Analyse aufgenommen.

Swap-Rates berechnet werden, soll das Vorliegen und das historische Verhalten von Varianzrisikoprämien auf unterschiedlichen nationalen Aktienmärkten miteinander verglichen werden. Hinzu kommt, dass in dieser Arbeit zudem der Zusammenhang von Varianzrisikoprämien und Kreditausfallrisiken von Staatsanleihen auf den insgesamt sechs nationalen Märkten untersucht werden soll.

Die Analyse gliedert sich in vier Abschnitte. Im folgenden Abschnitt wird zunächst das theoretische Fundament für die Schätzung von Varianzrisikoprämien und die Rolle, die den Volatilitätsindizes dabei zukommt, behandelt. Anschließend werden die Ergebnisse der empirischen Analyse in den Abschnitten drei und vier vorgestellt und diskutiert. Der letzte Abschnitt fasst die wichtigsten Erkenntnisse dieses Beitrags noch einmal zusammen.

6.2 Zur Schätzung von Varianzrisikoprämien

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, einen Zusammenhang zwischen den Volatilitätsindizes respektive der Varianz-Swap-Rates und Varianzrisikoprämien aufzuzeigen.

Wie bereits mehrfach im Verlauf der Arbeit erwähnt wurde, handelt es sich beim Indexstand eines Volatilitätsindex (näherungsweise) um die positive Quadratwurzel der Varianz-Swap-Rate eines mit einer entsprechenden Laufzeit ausgestatteten Varianz-Swap-Kontrakts:

$$\text{Vol-Index}_{t,\tilde{T}} \approx \sqrt{K_{t,\tilde{T}}^{var}} \quad (73)$$

Für den quadrierten Volatilitätsindex gilt dementsprechend

$$\text{Vol-Index}_{t,\tilde{T}}^2 \approx K_{t,\tilde{T}}^{var} . \quad (74)$$

Neben dem VIX und dem VDAX-New kam es im September 2007 durch die NYSE Euronext zur Einführung drei weiterer Volatilitätsindizes: dem AEX Volatilitätsindex (VAEX), dem BEL 20 Volatilitätsindex (VBEL) und dem CAC 40 Volatilitätsindex (VCAC). Im Juni 2008 kam zudem noch der FTSE 100 Volatilitätsindex (VFTSE) hinzu. Alle vier Volatilitätsindizes der NYSE Euronext beruhen auf dem-

selben Berechnungskonzept wie der VIX und der VDAX-New.¹²⁸

Für die Bestimmung der arbitragefreien Varianz-Swap-Rate mittels eines normalisierten Bewertungskernels $m_{t,T}$, für den $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}|\mathcal{F}_t) = 1$ gilt, ergibt sich zunächst¹²⁹

$$K_{t,T}^{var} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) , \quad (75)$$

wobei $\mathcal{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du$. Mit Hilfe der Definition für die Kovarianz zwischen dem normalisierten Bewertungskern und der integrierten Varianz ist es möglich, eine direkte Beziehung zwischen der Varianz-Swap-Rate und der integrierten Varianz herzustellen:

$$\begin{aligned} \mathbb{COV}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}, \mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}|\mathcal{F}_t) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) + \mathbb{COV}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}, \mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) .$$

Der Ausdruck $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t)$ bezeichnet hierbei den bedingten statistischen Mittelwert der integrierten Varianz. Es zeigt sich, dass die Varianzrisikoprämie, die Differenz zwischen Erwartungswerten der zukünftigen Varianz unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen \mathbb{P} und \mathbb{Q} , durch die negative Kovarianz zwischen dem normalisierten Bewertungskern und der integrierten Varianz bestimmt ist:

$$\begin{aligned} VRP_{t,T} &\equiv -\mathbb{COV}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}, \mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) - K_{t,T}^{var} \\ &\approx \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t) - \text{Vol-Index}_{t,T}^2 \end{aligned} \quad (76)$$

Bildet man den unbedingten Erwartungswert auf beiden Seiten von Gleichung (76), ergibt sich der Mittelwert der Differenz zwischen der integrierten Varianz und dem quadrierten Volatilitätsindex als Schätzer für die durchschnittliche Varianzrisikoprä-

¹²⁸Zur konkreten Berechnungsweise dieser Volatilitätsindizes vgl. Abschnitt 2.2.2.

¹²⁹Vgl. ANDERSEN et al. (2007), S. 14.

mie:¹³⁰

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(VRP_{t,T}) \approx \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{V}_{t,T} - \text{Vol-Index}_{t,T}^2)$$

Bei der Differenz $\mathcal{V}_{t,T} - \text{Vol-Index}_{t,T}^2$ handelt es sich um den Gewinn beziehungsweise Verlust einer Long-Position eines in t abgeschlossenen Varianz-Swap-Kontrakts mit der Swap-Rate $\text{Vol-Index}_{t,T}^2$ und Fälligkeit in T .

Für die empirische Untersuchung in Abschnitt 6.4 verwenden wir die nachfolgenden Schätzer für die Ermittlung der Varianzrisikoprämien. Hierbei handelt es sich um zwei verschiedene Maße für die Performance eines Investments in einen Varianz-Swap. Zum einen den in Geldeinheiten (Euro beziehungsweise US-Dollar) angegebenen Ertrag aus einer Long-Position in einem Varianz-Swap mit einem Nominalbetrag von 100 Geldeinheiten, die bis zur Fälligkeit des Kontrakts gehalten wird:¹³¹

$$\widehat{VRP}_{t,T} \equiv 100 \cdot (\hat{\sigma}_{t,T}^2 - \text{Vol-Index}_{t,T}^2) \quad (77)$$

Zum anderen betrachten wir die logarithmierte Differenz, bei der es sich um die stetige Überschussrendite einer Long-Position in einem Varianz-Swap handelt:

$$\widehat{LVRP}_{t,T} \equiv \ln(\hat{\sigma}_{t,T}^2) - \ln(\text{Vol-Index}_{t,T}^2) = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{t,T}^2}{\text{Vol-Index}_{t,T}^2}\right) \quad (78)$$

Die Varianz-Swap-Rate stellt dabei die Kosten der Replikation des floating-legs zum Initialisierungszeitpunkt t des Kontrakts dar. Die Auszahlung bei Fälligkeit in T ist die Varianz $\hat{\sigma}_{t,T}^2$. Bei den Gleichungen (77) und (78) handelt es sich um dieselben Schätzer für die Varianzrisikoprämie, die unter anderem auch in den Arbeiten von CARR/WU (2009a), SCHWARTZ/TROLLE (2008), EGLOFF/LEIPOLD/WU (2007) und HAFNER/WALLMEIER (2006) verwendet werden und somit einen direkten Vergleich ermöglichen.

Der gängige Standardansatz, der in der Praxis für die Schätzung der integrierten Varianz $IV_{0,1}$ über den Zeitraum $[0, 1]$, i.e. eines Tages, herangezogen wird, ist der

¹³⁰Vgl. CARR/WU (2006a), S. 21.

¹³¹Die Größe $\hat{\sigma}_{t,T}^2$ wird mit Hilfe diskreter Daten ermittelt. Es handelt sich hierbei um den Schätzer der (durchschnittlichen) integrierten Varianz $\mathcal{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} IV_{t,T}$.

Close-to-Close Schätzer:

$$\hat{\sigma}_{0,1}^2 = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)^2, \quad (79)$$

wobei S_t für den Schlusskurs des Basiswertes des Tages t steht. Die Schätzung der durchschnittlichen integrierten Varianz über den im weiteren Verlauf der Arbeit relevanten Zeitraum von 30 Tagen, erfolgt durch die Summierung der entsprechenden Tagesvarianzen $\hat{\sigma}_{0,1}^2$ und anschließender Annualisierung gemäß:

$$\hat{\sigma}_{0,N}^2 = \frac{365}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{0,1;j}^2, \quad (80)$$

wobei $N = 30$ gelte. Die Zahl 365 rührt daher, dass wir in dieser Arbeit unsere Berechnungen an die Konventionen der Volatilitätsindizes anpassen und gemäß diesen nicht mit beispielsweise 252 Handelstagen sondern 365 Kalendertagen für den Zeitraum eines Jahres rechnen.

6.3 Daten und Deskriptive Statistik

Für die statistische Analyse der Varianzrisikoprämien verwenden wir in dieser Arbeit historische Daten täglicher Schlusskurse der sechs Aktien- und Volatilitätsindizes über den Zeitraum vom 4. Januar 2000 bis zum 29. November 2010.¹³² Dies entspricht einer Spanne von 3982 Kalendertagen.¹³³ Für die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den CDS-Spreads und den Varianzrisikoprämien steht uns aufgrund des vergleichsweise noch jungen Marktes für Kreditderivate ein verkürzter Beobachtungszeitraum vom 3. Januar 2007 bis zum 29. September 2010 zur Verfügung. Das entspricht einer Spanne von 1427 Kalendertagen. Im Falle Großbritanniens und der USA verkürzt sich der Zeitraum noch einmal um ca. elf Monate. Bei den CDS-Spreads handelt es sich um Mid-Quotierungen fünfjähriger CDS mit einem Nominalwert in Höhe von \$10 Millionen. Für die Regressionsanalyse greifen wir nicht auf Tagesdaten sondern auf wöchentliche Schlusskurse (die jeweils mittwochs beobachtet wurden) der CDS zurück. Sämtliche in der empirischen Analyse

¹³²Die Volatilitätsindizes wurden für die Zeit vor ihrer Einführung von dem jeweiligen Indexbetreiber zurückgerechnet.

¹³³Die Verwendung von Kalender- anstelle von Handelstagen resultiert daraus, da die Volatilitätsindizes implizite Varianzen über einen Zeitraum der nächsten 30 Kalendertage abbilden.

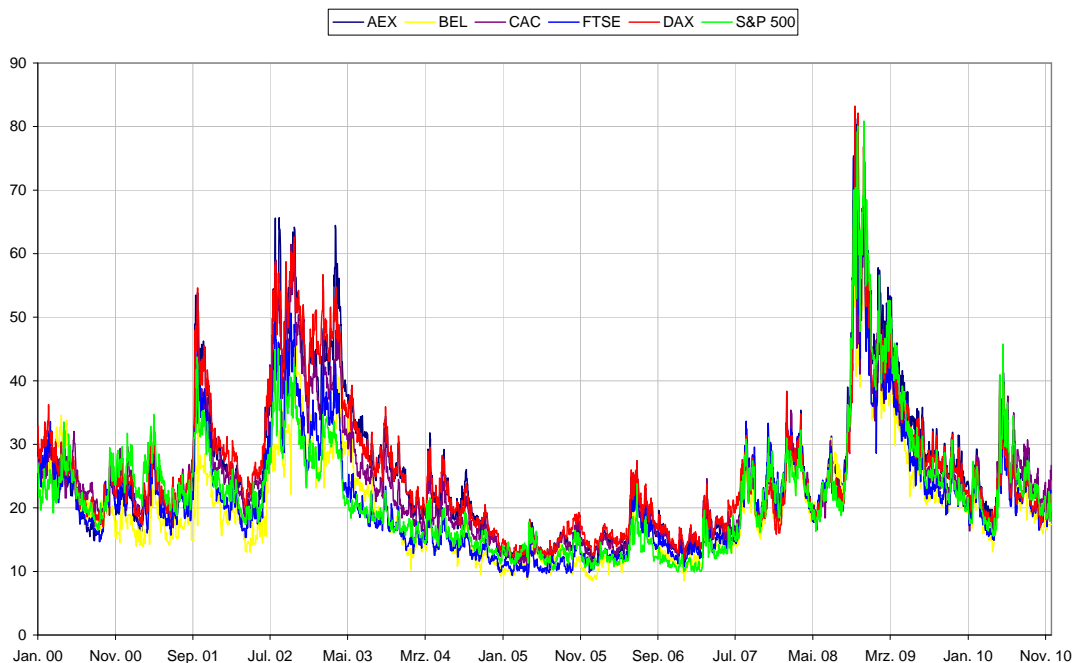
verwendeten Daten stammen von Thomson Reuters Financial Datastream.

Zusätzlich zur Betrachtung des Gesamtzeitraumes von etwa 10 Jahren, wird eine Unterteilung des Gesamtzeitraumes in zwei Subperioden vorgenommen. Dies gilt jedoch nicht für die Analyse des Zusammenhangs zwischen den CDS Spreads und den Varianzrisikoprämien, da eine Aufteilung des Zeitraumes aufgrund der verfügbaren Datenlage wenig Sinn machen würde. In Tabelle 15 sind die insgesamt 3 Betrachtungszeiträume dargestellt:

Tabelle 15: Beobachtungszeiträume.

	Zeitraum
Subperiode I	04.01.2000-31.12.2005
Subperiode II	01.01.2006-29.11.2010
Gesamtzeitraum 1	04.01.2000-29.11.2010
Gesamtzeitraum 2	03.01.2007-29.09.2010

Abbildung 7: Verlauf der sechs Volatilitätsindizes.

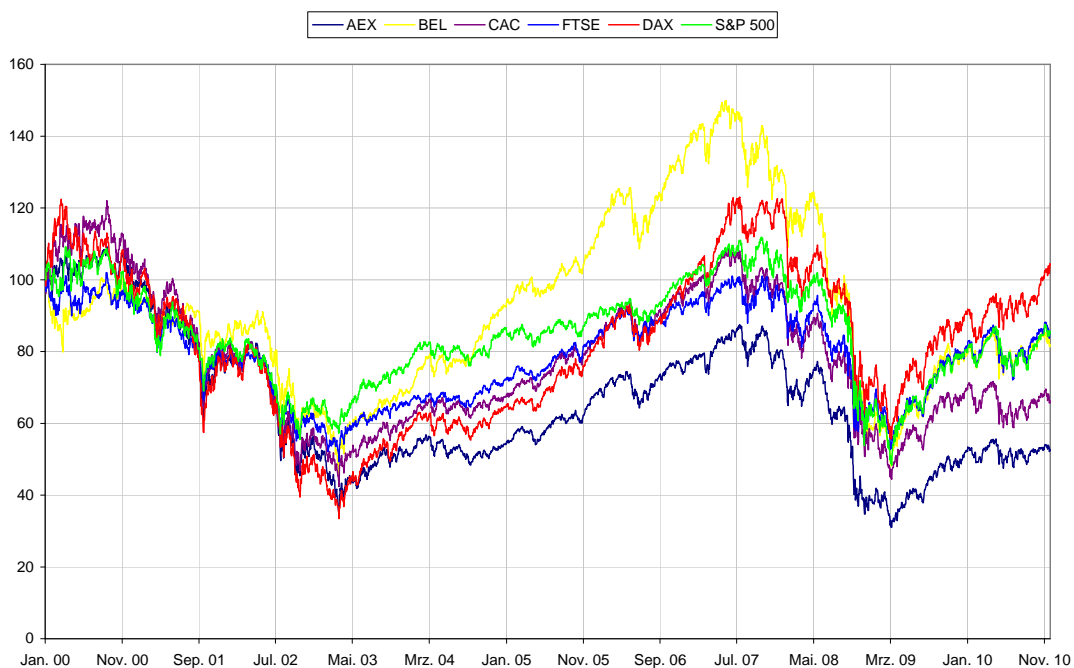


Quelle: Thomson Reuters Financial Datastream.

Abbildung 7 verschafft einen Eindruck über die Entwicklung der sechs Volatilitätsindizes seit Januar 2000. Es ist zunächst deutlich erkennbar, dass die sechs Volatilitätsindizes eine hohe Korrelation untereinander aufweisen, selbst starken Schwankungen unterworfen sind und eine Mean-Reversion-Tendenz aufweisen. Es wird ersichtlich,

dass es in den vergangenen zehn Jahren sowohl Zeiträume niedriger als auch sehr ausgeprägter Volatilitätsniveaus gab. Die erste Subperiode weist zwar mehr Volatilitätsspitzen auf, sie war im Mittel jedoch etwas weniger volatil als die durch die Finanz- und Wirtschaftskrise gekennzeichnete zweite Subperiode. Mit Blick auf Abbildung 8, welche die relative Entwicklung der sechs Aktienindizes abbildet, wird insbesondere das gerade in Krisenzeiten vorliegende häufig entgegengesetzte Verhalten von Volatilität und Kurs des Basiswertes gut ersichtlich. Das heißt, steigende beziehungsweise fallende Kursnotierungen im Basiswert gehen meist mit einem Rückgang beziehungsweise Anstieg der Volatilität einher. Dies wird in Tabelle 16 bestätigt, welche die Korrelationen zwischen den Volatilitätsindizes und den korrespondierenden Aktienindizes aufführt.

Abbildung 8: Verlauf der sechs Aktienindizes.

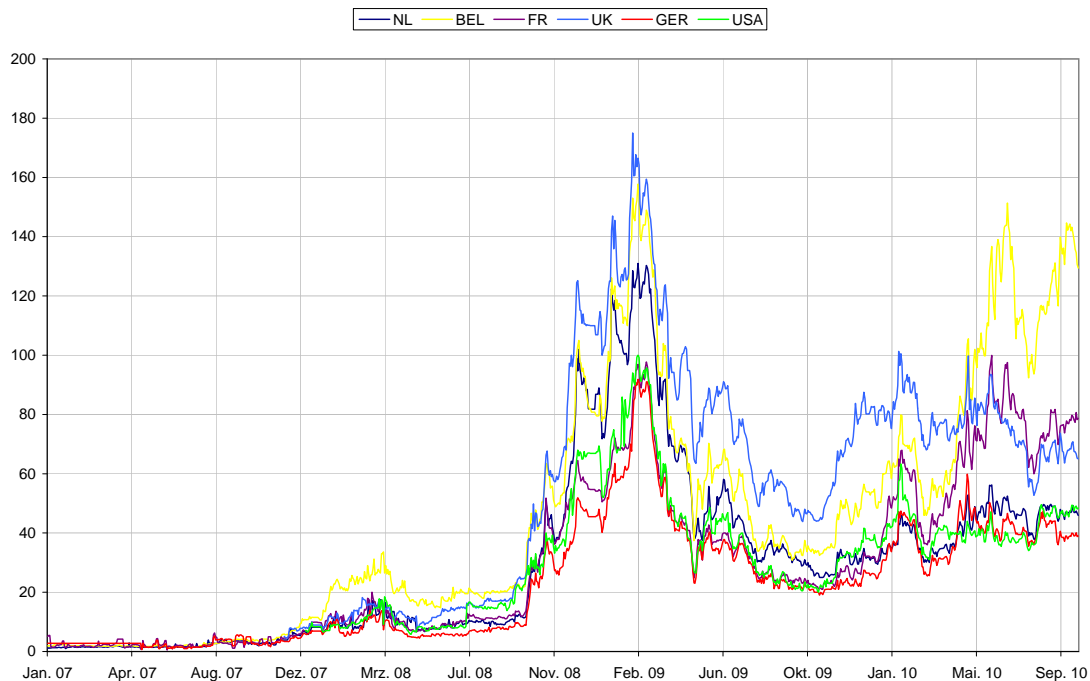


Quelle: Thomson Reuters Financial Datastream.

Tabelle 16: Korrelationen zwischen den Aktien- und Volatilitätsindizes.

	Korrelation
AEX/VAEX	-0,45
BEL/VBEL	-0,52
CAC/VCAC	-0,45
FTSE/VFTSE	-0,39
DAX/VDAX-New	-0,45
SPX/VIX	-0,53

Abbildung 9: Verlauf der CDS-Prämien.



Quelle: Thomson Reuters Financial Datastream.

Abbildung 9 zeigt schließlich noch die Entwicklung der CDS-Prämien der sechs Länder seit Januar 2007. Sehr gut erkennbar ist der Ende 2007 beginnende zunächst langsame Anstieg der CDS-Prämien, der dann im Zuge des Bankrotts der US-amerikanischen Investmentbank Lehman Brothers ein beachtliches Ausmaß angenommen hat. Auch gegenwärtig bewegen sich die Preise für Kreditausfallversicherungen auf Staatsanleihen aus Belgien, Frankreich und dem Vereinigten Königreich auf einem vergleichsweise hohen Niveau, wobei insbesondere Belgien deutlich hervorsteicht.

Die Tabellen 17 und 18 zeigen die statistischen Kenngrößen der ex post geschätzten Varianzen sowie der sechs Volatilitätsindizes innerhalb der verschiedenen Beobachtungszeiträume. Um die Daten miteinander vergleichbar zu machen, sind die Volatilitätsindizes in ihrer ursprünglichen Form, als implizite Varianzen angegeben. Vergleicht man die Volatilitätsindizes mit den korrespondierenden Varianzen, so fällt auf, dass die Indizes in allen Perioden und für nahezu alle der sechs Länder im Mittel über der ex post geschätzten Varianz liegen. Diese Beobachtung deutet bereits auf das Vorliegen einer negativen Varianzrisikoprämie hin. Die historischen Varianzen zeigen allesamt eine positive Schiefe sowie eine, insbesondere in der zweiten Subperi-

ode, sehr ausgeprägte positive Kurtosis. Dies sollte nicht verwundern, da die Varianz beziehungsweise Volatilität dazu neigt in Phasen steigender Marktskepsis sprunghaft anzusteigen und sich dann wieder auf niedrigere Niveaus hinzubewegt. Die Maxima, sowohl der Volatilitätsindizes als auch der ex post geschätzten Varianzen, befinden sich in der zweiten Subperiode. Diese Periode ist durch die starken Kursverwerfungen und der damit einhergehenden Unsicherheit der Marktteilnehmer, die sich im Zuge der Finanzmarktkrise ereigneten, geprägt. In Tabelle 19 finden sich die statistischen Kenngrößen der CDS-Prämien. Wie man sieht, war der Preis für eine Kreditausfallversicherung auf deutsche Staatsanleihen mit durchschnittlich 22,5 Basispunkten am geringsten. Die höchste Prämie erreichten die CDS aus dem Vereinigten Königreich zu Beginn des Jahres 2009 mit einem Wert von 175 Basispunkten. Die CDS-Prämien zeigen allesamt eine positive Schiefe sowie eine meist negative Kurtosis.¹³⁴

¹³⁴Zu beachten ist in Tabelle 19, dass für das Vereinigte Königreich und die USA ein um elf Monate verkürzter Beobachtungszeitraum zur Verfügung stand.

Tabelle 17: **Deskriptive Statistik der ex post geschätzten Varianzen.**

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
Mittelwert	6,37	3,70	5,71	3,55	7,32	3,53
Stabw.	8,91	5,39	6,58	4,43	8,41	3,39
Schiefe	2,50	2,74	2,33	2,68	2,17	2,15
Kurtosis	5,98	8,02	5,15	8,27	4,51	5,75
Min	0,48	0,23	0,53	0,26	0,61	0,35
Max	48,10	31,80	36,76	28,73	46,10	21,72
Subperiode II						
Mittelwert	7,08	5,90	7,03	5,58	6,28	6,41
Stabw.	11,97	8,96	10,40	8,91	9,31	11,69
Schiefe	4,12	4,33	3,84	4,24	3,92	3,78
Kurtosis	18,99	21,96	16,91	20,59	17,45	14,86
Min	0,48	0,46	0,66	0,44	0,51	0,27
Max	83,07	67,37	73,54	65,11	67,37	82,18
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	6,69	4,68	6,30	4,46	6,86	4,81
Stabw.	10,39	7,28	8,52	6,88	8,84	8,33
Schiefe	3,71	4,42	3,80	4,79	3,06	5,21
Kurtosis	17,25	26,46	19,20	30,33	11,33	31,76
Min	0,48	0,23	0,53	0,26	0,51	0,27
Max	83,07	67,37	73,54	65,11	67,37	82,18

Angabe in Varianzpunkten

6.4 Empirische Analyse

6.4.1 Varianzrisikoprämien nationaler Aktienindizes

In diesem Abschnitt soll zunächst das Vorliegen von Varianzrisikoprämien auf den sechs hier betrachteten Märkten untersucht und deren statistische Kenngrößen dargestellt werden.

Als Schätzer für die Varianzrisikoprämie werden die in Abschnitt 6.2.1 bereits vorgestellten Größen

$$\widehat{VRP}_{t,T} = 100 \cdot (\hat{\sigma}_{t,T}^2 - \text{Vol-Index}_{t,T}^2)$$

Tabelle 18: **Deskriptive Statistik der sechs Volatilitätsindizes.**

	VAEX	VBEL	VCAC	VFTSE	VDAX	VIX
Subperiode I						
Mittelwert	7,74	4,26	6,75	5,01	8,20	4,87
Stabw.	7,57	3,33	5,90	4,50	7,26	3,21
Schiefe	2,06	1,63	2,15	1,98	1,77	1,39
Kurtosis	4,05	3,20	5,18	4,21	2,50	2,17
Min	1,02	0,74	0,85	0,83	1,36	1,05
Max	43,12	22,48	37,78	32,65	39,23	20,32
Subperiode II						
Mittelwert	7,95	5,78	7,13	6,45	7,39	7,02
Stabw.	9,07	6,01	7,27	7,28	8,11	8,60
Schiefe	3,13	3,27	3,48	3,77	3,69	3,21
Kurtosis	11,78	14,52	15,77	18,12	16,92	12,41
Min	1,16	0,73	1,34	1,15	1,47	0,98
Max	65,97	48,26	60,92	57,06	69,27	65,38
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	7,83	4,94	6,92	5,65	7,84	5,83
Stabw.	8,28	4,78	6,55	5,94	7,66	6,31
Schiefe	2,72	3,47	3,01	3,72	2,77	4,12
Kurtosis	9,30	19,38	12,86	20,95	10,32	23,72
Min	1,02	0,73	0,85	0,83	1,36	0,98
Max	65,97	48,26	60,92	57,06	69,27	65,38

Angabe in Varianzpunkten

Tabelle 19: **Deskriptive Statistik der CDS-Prämien.**

	NL	BEL	FRA	UK*	DE	USA*
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	30,19	45,69	29,99	60,18	22,52	33,98
Stabw.	29,31	41,53	27,07	38,19	19,66	20,11
Schiefe	1,29	0,87	0,74	0,33	0,89	0,80
Kurtosis	1,45	-0,26	-0,67	-0,39	0,52	0,68
Min	1,00	1,40	0,50	4,50	0,60	5,80
Max	131,00	157,75	99,97	175,00	91,85	100,00

* verkürzter Beobachtungszeitraum

und

$$\widehat{LVRP}_{t,T} = \ln \left(\hat{\sigma}_{t,T}^2 / \text{Vol-Index}_{t,T}^2 \right)$$

verwendet. Betrachtet wird dementsprechend der in Geldeinheiten angegebene Er-

trag aus einer Long-Position in einem Varianz-Swap mit einem Nominalwert von 100 Euro beziehungsweise US-Dollar sowie die stetige Überschussrendite aus einer Long-Position in einem Varianz-Swap. Die Varianz-Swap-Rate stellt in beiden Fällen den quadrierten Volatilitätsindex der jeweiligen sechs Länder dar. Die Tabellen 20 und 21 fassen die statistischen Kenngrößen der beiden Schätzer für die durchschnittlichen Varianzrisikoprämien zusammen. Als erstes fällt auf, dass sowohl die

Tabelle 20: **Deskriptive Statistik der Varianzrisikoprämien $\widehat{VRP}_{t,T}$.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
Mittelwert	-1,37*†	-0,56	-1,04*††	-1,46**††	-0,88†	-1,35**††
Stabw.	6,07	4,60	4,31	3,50	5,05	2,47
Schiefe	2,27	2,09	1,64	1,60	2,48	0,54
Kurtosis	9,59	7,23	6,75	9,94	11,41	5,93
Min	-21,89	-14,52	-14,99	-18,05	-16,37	-13,72
Max	34,46	24,11	22,78	19,70	31,52	12,66
Subperiode II						
Mittelwert	-0,87	0,11	-0,10	-0,86	-1,10	-0,62
Stabw.	9,66	8,24	8,36	7,44	7,36	8,36
Schiefe	4,38	3,42	4,20	3,68	3,51	4,18
Kurtosis	26,69	19,31	23,93	23,66	24,55	25,61
Min	-27,56	-29,51	-25,85	-32,19	-32,21	-32,49
Max	68,64	56,40	60,42	49,69	56,31	70,11
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	-1,15†	-0,26	-0,62	-1,19**††	-0,98*†	-1,02*†
Stabw.	7,88	6,49	6,46	5,61	6,19	5,89
Schiefe	4,22	3,62	4,47	4,13	3,35	5,52
Kurtosis	29,76	24,91	33,06	35,51	24,91	50,37
Min	-27,56	-29,51	-25,85	-32,19	-32,21	-32,49
Max	68,64	56,40	60,42	49,69	56,31	70,11

Varianzrisikoprämie $\widehat{VRP}_{t,T}$ mit Werten von -1,37 bis 0,11 als auch die logarithmierte Varianzrisikoprämie $\widehat{LVRP}_{t,T}$ mit Werten von -0,55 bis -0,18 in nahezu allen Fällen ein negatives Vorzeichen aufweisen. Beide Schätzer zeigen in der ersten Subperiode in fünf von sechs Fällen höhere negative Werte auf als in den anderen beiden Zeiträumen. Diese Beobachtung lässt sich darauf zurückführen, dass die Sub-

Tabelle 21: **Deskriptive Statistik der Varianzrisikoprämien $\widehat{LVRP}_{t,T}$.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.[†] Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ^{††} Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
Mittelwert	-0,49**††	-0,54**††	-0,35**††	-0,55**††	-0,30**††	-0,49**††
Stabw.	0,58	0,81	0,52	0,54	0,52	0,49
Schiefe	0,93	0,49	0,43	0,91	0,58	0,27
Kurtosis	1,59	0,00	0,51	1,53	1,42	-0,07
Min	-1,83	-2,37	-1,86	-1,79	-1,84	-1,91
Max	1,90	1,97	1,40	1,60	1,86	1,05
Sharpe Ratio	0,62	0,48	0,49	0,79	0,43	0,76
Subperiode II						
Mittelwert	-0,39**††	-0,18**††	-0,25**††	-0,39**††	-0,37**††	-0,43**††
Stabw.	0,69	0,70	0,65	0,66	0,62	0,66
Schiefe	1,25	1,16	1,19	1,13	0,99	0,98
Kurtosis	1,78	1,30	1,68	1,50	1,82	1,66
Min	-1,72	-1,81	-1,68	-1,78	-2,02	-1,91
Max	2,25	2,32	2,25	2,00	1,91	2,17
Sharpe Ratio	0,42	0,20	0,29	0,44	0,45	0,47
Gesamtzeitraum						
Mittelwert	-0,45**††	-0,38**††	-0,31**††	-0,48**††	-0,33**††	-0,46**††
Stabw.	0,63	0,78	0,59	0,60	0,57	0,57
Schiefe	1,15	0,59	0,96	1,10	0,79	0,82
Kurtosis	1,95	0,55	1,69	1,82	1,69	1,73
Min	-1,83	-2,37	-1,86	-1,79	-2,02	-1,91
Max	2,25	2,32	2,25	2,00	1,91	2,17
Sharpe Ratio	0,52	0,35	0,39	0,60	0,44	0,60

periode I durch eine geringere Schwankungsintensität der Renditen gekennzeichnet ist und die Long-Position in einem Varianz-Swap sich daher in dieser Periode als wenig profitabel erwies. Eine Absicherung gegen eine zunehmende Marktvolatilität stellte sich in dieser Zeitperiode somit als recht teuer heraus. In der zweiten Subperiode fallen die Varianzrisikoprämien aufgrund der erhöhten Marktvolatilität weniger negativ aus. Um Aussagen über die statistische Signifikanz der Risikoprämien machen zu können, testen wir die Hypothesen

$$H_0 : \widehat{VRP}_{t,T} = 0, H_1 : \widehat{VRP}_{t,T} \neq 0 \text{ und } H_0 : \widehat{LVRP}_{t,T} = 0, H_1 : \widehat{LVRP}_{t,T} \neq 0$$

sowie

$$H_0 : \widehat{VRP}_{t,T} = 0, H_1 : \widehat{VRP}_{t,T} < 0 \quad \text{und} \quad H_0 : \widehat{LVRP}_{t,T} = 0, H_1 : \widehat{LVRP}_{t,T} < 0$$

für alle sechs Länder. Eine statistische Signifikanz der Varianzrisikoprämien liegt bei der Verwendung des Schätzers $\widehat{VRP}_{t,T}$ nur in der ersten Subperiode sowie in drei Fällen auch bei der Betrachtung des Gesamtzeitraumes vor.¹³⁵ Die mittlere logarithmierte Varianzrisikoprämie $\widehat{LVRP}_{t,T}$ ist hingegen für alle sechs Märkte und über alle Beobachtungszeiträume statistisch signifikant. Dies hängt unter anderem damit zusammen, dass die Schätzer $\widehat{LVRP}_{t,T}$ durch eine im Vergleich zu den Schätzern $\widehat{VRP}_{t,T}$ deutlich geringere (NEWBY/WEST-)Standardabweichung gekennzeichnet sind, was sich unmittelbar auf die Teststatistik auswirkt. Die Varianzrisikoprämien $\widehat{VRP}_{t,T}$ weisen über alle Beobachtungszeiträume eine positive Schiefe und Kurtosis auf. Insbesondere in der zweiten Subperiode ergeben sich aufgrund der ausgeprägten Volatilitätsspitzen sehr hohe Werte für diese beiden Parameter. Im Vergleich dazu nehmen Schiefe und Kurtosis für die logarithmierten Risikoprämien deutlich geringere Werte an und kommen den Werten einer Normalverteilung näher.

Auf Basis der vorliegenden Daten lässt sich festhalten, dass Investoren bereit sind, einen im Mittel negativen Ertrag in Kauf zu nehmen, um sich gegen eine erhöhte Marktvolatilität abzusichern. Das Eingehen der entgegengesetzten Position, d.h. der Verkauf von Renditevarianz, hat sich dagegen als recht profitabel während der hier vorliegenden Beobachtungszeiträume erwiesen. In Tabelle 21 sind zusätzlich die annualisierten Sharpe-Ratios (berechnet unter Verwendung der Standardabweichungen nach NEWBY/WEST (1987)) einer Short-Position in Varianz-Swaps, mit dem quadrierten Volatilitätsindex als Swap-Rate für das jeweilige Land, aufgeführt. Die höchsten Sharpe-Ratios tauchen in der Subperiode I auf. Die konkreten Werte liegen hierbei zwischen 0,43 und 0,79 und damit deutlich über denen eines klassi-

¹³⁵Für die Inferenzstatistiken gilt es zu beachten, dass Daten der hier vorliegenden Form weder frei von Heteroskedastizität noch von Autokorrelation sind. Dies lässt sich insbesondere auf die Überlappung der Beobachtungszeiträume zurückführen, die aus der Verwendung täglicher Daten resultiert. Um valide Teststatistiken zu erhalten, ist es notwendig die Standardabweichungen der Schätzer zu korrigieren und so der vorliegenden Heteroskedastizität (unbekannter Form) und Autokorrelation Rechnung zu tragen. Wir greifen in dieser Arbeit auf die robusten NEWBY/WEST-Schätzer zurück. Für das maximale Lag wählen wir einen Wert von 30 bei der Verwendung von Tagesdaten sowie einen Wert von vier bei der Verwendung von Wochendaten, um so die überlappenden Beobachtungszeiträume angemessen zu berücksichtigen.

schen Aktieninvestments. Die höchsten Sharpe-Ratios ergeben sich für den FTSE-100 und den S&P 500 mit Werten von 0,79 und 0,76. Bei den Sharpe-Ratios gilt es jedoch zu beachten, dass diese auf Grundlage der quadrierten Volatilitätsindizes berechnet wurden und nicht etwa mit tatsächlich verfügbaren Varianz-Swap-Rates (Marktpreise).

6.4.2 Erklärung der Varianzrisikoprämien mit Hilfe des CAPM

Dass die Renditevarianz nicht konstant ist, kann zum einen durch ihre Korrelation mit den Renditen und der zugehörigen Risikoprämie des zugrunde liegenden Basiswertes hervorgerufen sein oder aber durch einen weiteren Risikofaktor—bedingt dadurch, dass die Renditevarianz einem vom Basiswert unabhängigen stochastischen Prozess folgt—oder beidem.¹³⁶ Als nächstes soll daher der Frage nachgegangen werden, ob ein (partiell) Gleichgewichtsmodell wie das CAPM in der Lage ist, die negativen Varianzrisikoprämien beziehungsweise die Überschussrendite aus einer Investition in einen Varianz-Swap mit dem quadrierten Volatilitätsindex als zugehöriger Swap-rate zu erklären. Trifft das CAPM zu, dann kann die negative Varianzrisikoprämie einzig und allein aus der Korrelation des Varianz-Swaps mit dem Marktportfolio hervorgehen und nicht von einem eigenen, mit dem Marktportfolio unabhängigen, Risikofaktor. Es gilt somit zu überprüfen, ob die negative Korrelation zwischen Varianz-Swap und Marktportfolio die negative Varianzrisikoprämie vollständig erklären kann. Hierfür regressieren wir die stetige Überschussrendite der Long-Position in einem Varianz-Swap mit dem quadrierten Volatilitätsindex als zugehöriger Swap-Rate auf die stetige Überschussrendite $(r_{t,T}^M - r_f)$ aus einer Long-Position im Marktportfolio:

$$\widehat{LVRP}_{t,T} = b_0 + b_1 (r_{t,T}^M - r_f) + e_{t,T}$$

Als Marktportfolio dienen hierbei die jeweiligen Aktienindizes AEX, BEL 20, CAC 40, FTSE 100, DAX und S&P 500. Als risikolosen Zinssatz verwenden wir den Euribor Einmonats-Zinssatz für die europäischen Indizes und die vierwöchige Treasury Bill Rate für den S&P 500. Sofern das CAPM in der Lage ist, die Varianzrisikoprämie vollständig zu erklären, sollte eine nicht signifikant von Null verschiedene

¹³⁶Vgl. CARR/WU (2009a), S. 1312.

Regressionskonstante b_0 und ein signifikant negativ ausgeprägter Wert für den Steigungsparameter b_1 zu beobachten sein. Die zu testenden Hypothesen lauten

$$H_0 : b_0 = 0, H_1 : b_0 \neq 0 \text{ und } H_0 : b_1 = 0, H_1 : b_1 \neq 0 \quad (81)$$

sowie

$$H_0 : b_1 = 0, H_1 : b_1 < 0 . \quad (82)$$

Die Ergebnisse der OLS-Regression sind in Tabelle 22 abgebildet. Die robusten

Tabelle 22: Erklärung der Varianzrisikoprämien mit Hilfe des CAPM. * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
b_0	-0,52**	-0,54**	-0,37**	-0,58**	-0,33**	-0,56**
SE	0,05	0,08	0,05	0,04	0,04	0,04
b_1	-4,68**††	-5,35**††	-4,27**††	-6,03**††	-3,78**††	-4,53**††
SE	0,86	1,41	0,78	1,08	0,69	0,87
R^2	0,27	0,12	0,23	0,24	0,27	0,21
Subperiode II						
b_0	-0,43**	-0,23**	-0,29**	-0,40**	-0,36**	-0,45**
SE	0,05	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05
b_1	-6,11**††	-5,60**††	-6,84**††	-7,40**††	-5,76**††	-7,15**††
SE	0,67	0,70	0,87	0,89	0,90	1,13
R^2	0,47	0,35	0,46	0,43	0,38	0,42
Gesamtzeitraum						
b_0	-0,48**	-0,40**	-0,34**	-0,50**	-0,35**	-0,50**
SE	0,04	0,05	0,03	0,03	0,03	0,04
b_1	-5,44**††	-5,66**††	-5,56**††	-6,79**††	-4,60**††	-6,25**††
SE	0,55	0,70	0,64	0,72	0,58	0,86
R^2	0,37	0,21	0,34	0,33	0,32	0,34

Standardfehler der Schätzer b_0 und b_1 wurden nach dem Ansatz von NEWBY/WEST (1987) berechnet. Hinsichtlich der Regressionskonstanten und dem Steigungsparameter zeichnet sich ein über alle drei Beobachtungsperioden einheitliches Bild ab. Der Schätzer b_1 liefert durchweg signifikant negative Werte, was auf die schon an-

gesprochene negative Korrelation zwischen einem Varianz-Swap und dem Marktportfolio zurückzuführen ist. Allerdings kann die negative Korrelation die negative Varianzrisikoprämie nicht vollständig erklären, da auch die Schätzer für b_0 durchweg für jedes der sechs Länder signifikant von Null verschiedene Werte annehmen. Es fällt zudem auf, dass die Schätzwerte b_0 für die Regressionskonstante—hierbei handelt es sich um ein Maß für die Überschussrendite einer Anlage gegenüber dem Marktportfolio—nahe der durchschnittlichen Varianzrisikoprämien liegen. Diese Ergebnisse stimmen mit denen aus CARR/WU (2009) überein und deuten darauf hin, dass es noch mindestens einen weiteren, vom Marktportfolio unabhängigen, Risikofaktor geben muss, durch den die negative Varianzrisikoprämie hervorgerufen wird.

6.4.3 Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen

Anknüpfend an dem vorherigen Abschnitt, soll nun noch einmal der Zusammenhang zwischen der Rendite der Long-Position in einem Varianz-Swap mit dem quadrierten Volatilitätsindex als zugehöriger Swap-rate und der Rendite des Marktportfolios beziehungsweise der zugrunde liegenden Aktienindizes genauer betrachtet werden. Die Ergebnisse haben bereits dargelegt, dass ein signifikanter und negativer Zusammenhang zwischen der Überschussrendite einer Long-Position in einem Varianz-Swap respektive der logarithmierten Varianzrisikoprämie und der Überschussrendite einer Long-Position in dem Marktportfolio besteht. Bei der Betrachtung von Unternehmen wird bei der Beziehung zwischen der Volatilität und der zugrunde liegenden Aktienrendite gerne von dem sogenannten „Leverage Effekt“ gesprochen.¹³⁷ Die Arbeiten von HAUGEN et al. (1991) und BEKAERT/WU (2000) lassen jedoch Zweifel an diesem Erklärungsansatz aufkommen. Die Autoren kommen vielmehr zu dem Schluss, dass der Zusammenhang zwischen der Volatilität und der Rendite des Basiswertes in Phasen negativer Kursentwicklungen deutlich stärker ausgeprägt ist, als in Phasen positiver Kursentwicklungen und somit korrekterweise eher von einem „Down-Market-Effekt“ die Rede sein sollte.¹³⁸ Da der Käufer eines Varianz-Swaps von einer hohen Volatilität profitiert, sollte dementsprechend auch der Zusammenhang zwi-

¹³⁷Der „Leverage Effekt“ besagt, dass bei einem Rückgang des Aktienkurses eines Unternehmens beziehungsweise einer Verringerung des Eigenkapitalwertes eines Unternehmens der prozentuale Anteil des Fremdkapitals zunimmt, und dadurch die Beteiligung an dem Unternehmen riskanter wird und die Volatilität steigt. Vgl. HULL (2008), S. 395.

¹³⁸Vgl. HAFNER/WALLMEIER (2006), S. 18.

schen der Rendite aus einer Long-Position in Varianz-Swaps und der Rendite des zugrunde liegenden Basiswertes negativ sein.

Die nachfolgende Analyse unterscheidet sich von der Analyse aus dem vorherigen Abschnitt dadurch, dass nun keine Überschussrenditen betrachtet werden (streng genommen, können wir folglich nicht länger von einer *Varianzrisikoprämie* sprechen) und der Zusammenhang für fallende und für steigende Marktphasen separat untersucht wird. Das Regressionsmodell sieht damit nun wie folgt aus:

$$\ln \left(\frac{\hat{\sigma}_{t,T}^2}{e^{-r_f(T-t)} \text{Vol-Index}_{t,T}} \right) = b_0 + b_1 r_{t,T}^M + e_{t,T} ,$$

wobei nun unterschieden wird zwischen $t \in \{t | r_{t,T}^M < 0\}$ (fallende Märkte) und $t \in \{t | r_{t,T}^M > 0\}$ (steigende Märkte).¹³⁹ Die Testhypothesen stimmen mit denen in Gleichung (81) überein. Die Ergebnisse der OLS-Regression sind in Tabelle 23 und 24 dargestellt. Es zeigt sich, dass in Phasen fallender Kursnotierungen ein signifikanter negativer Zusammenhang zwischen der Long-Position in einem Varianz-Swap und der Rendite des zugrunde liegenden Basiswertes vorliegt. Der Steigungsparameter liegt in einem Wertebereich von -7,4 bis -4,2 und ist durchweg über alle Märkte und Beobachtungszeiträume hoch signifikant. Das Bestimmtheitsmaß weist Werte von 20,05% für den SPX bis 43,26% für den AEX auf. Die Indexrenditen sind somit in der Lage, einen recht hohen Anteil der Gesamtschwankung der Varianz-Swap-Renditen zu erklären. Betrachtet man den Zusammenhang zwischen den Varianz-Swap-Renditen und den Indexrenditen in Phasen steigender Märkte, ändert sich dieses Bild jedoch gravierend. Von einem (signifikant) negativen Zusammenhang kann nun nicht länger die Rede sein. Der Steigungsparameter ist gar in mehr als der Hälfte aller Fälle positiv und liegt in einem Wertebereich von -2,5 bis 7,0. Zudem ist er nur in den wenigsten Fällen signifikant von Null verschieden. Die Regressionskonstante ist durchweg für alle Indizes und Zeiträume signifikant negativ. Dies deutet darauf hin, dass der Käufer eines Varianz-Swaps in steigenden Marktphasen negative Renditen aus diesem Investment erzielt. Diese Beobachtung stimmt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.3 überein, fasst man diese Verluste als eine (Risiko-)Prämie dafür auf, in Zeiten fallender Märkte eine Absicherung gegenüber Verlusten aus einer Long-Position im Basiswert zu besitzen. Die Ergebnisse sprechen somit für

¹³⁹Die Vorgehensweise orientiert sich an HAFNER/WALLMEIER (2006), S. 18 ff.

Tabelle 23: **Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen:** $r_t < 0$. * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
b_0	-0,68**	-0,75**	-0,36**	-0,70**	-0,35**	-0,55**
SE	0,06	0,16	0,06	0,06	0,07	0,08
b_1	-7,55**††	-10,64**††	-5,21**††	-9,47**††	-4,85**††	-5,54**††
SE	1,09	1,71	0,98	1,42	1,18	1,05
R^2	0,43	0,29	0,25	0,34	0,31	0,20
Subperiode II						
b_0	-0,37**	-0,21*	-0,33**	-0,38**	-0,38**	-0,30**
SE	0,08	0,10	0,07	0,08	0,10	0,09
b_1	-6,38**††	-6,08**††	-8,10**††	-8,14**††	-6,93**††	-6,70**††
SE	0,77	0,74	1,05	1,06	1,15	1,26
R^2	0,41	0,30	0,38	0,32	0,35	0,33
Gesamtzeitraum						
b_0	-0,56**	-0,48**	-0,36**	-0,58**	-0,36**	-0,45**
SE	0,05	0,10	0,05	0,05	0,06	0,06
b_1	-7,14**††	-7,89**††	-6,79**††	-9,14**††	-5,65**††	-6,84**††
SE	0,66	1,00	0,86	0,87	0,95	1,08
R^2	0,43	0,28	0,32	0,35	0,32	0,30

einen „Down-Market-Effekt“, da deutlich zu sehen ist, dass die negative Korrelation zwischen der Marktvolatilität und den Indexrenditen fast ausschließlich in Phasen fallender Indexkurse zustande kommt.

6.4.4 Varianzrisikoprämien im Zeitverlauf

Ein weiterer wichtiger Aspekt, den es zu überprüfen gilt, ist, ob die Varianzrisikoprämien über die Zeit hinweg konstant und damit unkorreliert mit dem quadrierten Volatilitätsindex oder variabel sind. Hierfür greifen wir auf die nachfolgende MINCER/ZARNOWITZ-Regression, bei welcher die ex post geschätzte integrierte Varianz $\hat{\sigma}_{t,T}^2$ auf den entsprechenden Prognosewert $\text{Vol-Index}_{t,T}^2 \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}_{t,T}|\mathcal{F}_t]$ regressiert wird, zurück:

$$\hat{\sigma}_{t,T}^2 = b_0 + b_1 \text{Vol-Index}_{t,T}^2 + e_{t,T} \quad (83)$$

Tabelle 24: **Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen:** $r_t \geq 0$. * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant kleiner als Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
b_0	-0,79**	-0,94**	-0,61**	-0,77**	-0,57**	-0,74**
SE	0,06	0,09	0,06	0,05	0,06	0,05
b_1	2,76*	7,02**	1,82	1,59	1,07	0,87
SE	1,11	2,16	1,16	1,26	0,85	1,63
R^2	0,04	0,08	0,01	0,01	0,01	0,00
Subperiode II						
b_0	-0,68**	-0,43**	-0,49**	-0,59**	-0,58**	-0,73**
SE	0,07	0,06	0,07	0,06	0,07	0,08
b_1	-0,49	-0,77	-1,84†	-2,53*††	-1,00	-0,46
SE	0,92	1,00	1,09	1,02	1,23	2,06
R^2	0,00	0,00	0,02	0,03	0,01	0,00
Gesamtzeitraum						
b_0	-0,74**	-0,74**	-0,56**	-0,68**	-0,58**	-0,73**
SE	0,05	0,07	0,04	0,04	0,05	0,05
b_1	1,16	3,64*	0,09	-0,64	0,30	0,03
SE	0,84	1,46	0,85	0,80	0,69	1,35
R^2	0,01	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00

und

$$\ln(\hat{\sigma}_{t,T}^2) = b_0 + b_1 \ln(\text{Vol-Index}_{t,T}^2) + e_{t,T} . \quad (84)$$

Mit Hilfe der nachfolgenden Hypothesentests basierend auf den NEWBY/WEST- t -Statistiken testen wir bezüglich der Regressionskonstanten die Hypothese

$$H_0 : b_0 = 0, H_1 : b_0 \neq 0$$

und bezüglich des Steigungskoeffizienten die Hypothese

$$H_0 : b_1 = 1, H_1 : b_1 \neq 1 .$$

Eine Varianzrisikoprämie von Null erfordert, dass die Nullhypothese

$$H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1, H_1 : b_0 \neq 0 \text{ und/oder } b_1 \neq 1$$

nicht verworfen werden kann.¹⁴⁰ Zur Überprüfung dieser Hypothese verwenden wir die robuste Wald-Teststatistik, die asymptotisch χ^2 -verteilt ist mit $k = 2$ Freiheitsgraden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0,05$. Die Ergebnisse der Regression (83) und (84) lassen sich dann wie folgt deuten: Varianzrisikoprämien sind konstant, wenn der Steigungsparameter b_1 nicht signifikant von Eins verschieden ist. Kann die Hypothese $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ nicht abgelehnt werden, deutet dies auf das Nichtvorhandensein von Varianzrisikoprämien und Gleichheit der Erwartungen der zukünftigen integrierten Varianz unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen \mathbb{P} und \mathbb{Q} hin. Der quadrierte Volatilitätsindex stellt eine unverzerrte Prognose der zukünftigen Varianz dar.

In Tabelle 25 und 26 finden sich die Resultate der obigen Regressionsmodelle. Der Steigungsparameter ist für Gleichung (83) in den überwiegenden Fällen nicht signifikant von Eins verschieden. In allen drei Beobachtungszeiträumen deutet dies in jeweils 2/3 der Fälle auf konstante Varianzrisikoprämien—gemessen in Geldeinheiten—und einer geringen Korrelation mit dem quadrierten Volatilitätsindex hin. Die Hypothese $H_0 : b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ auf Nichtvorhandensein von Varianzrisikoprämien kann in immerhin 7 von 18 Fällen nicht verworfen werden. Die Resultate sehen etwas anders aus, wenn man die logarithmierten Varianzrisikoprämien betrachtet. Hier deuten die Ergebnisse stärker auf konstante Varianzrisikoprämien hin.¹⁴¹ Die Nullhypothese $b_1 = 1$ kann nur ein Mal verworfen werden. Die Nullhypothese $b_0 = 0 \wedge b_1 = 1$ auf Nichtvorhandensein von Varianzrisikoprämien kann jetzt allerdings nur noch in einem von 18 Fällen beibehalten werden. Es wird ersichtlich, dass die in stetigen Renditen ausgedrückten Varianzrisikoprämien über die Zeit hinweg konstanter sind und nicht stark mit den logarithmierten quadrierten Volatilitätsindizes korreliert sind.

¹⁴⁰Eine Varianzrisikoprämie von Null impliziert, dass für die Kovarianz zwischen dem normalisierten Bewertungskern und der integrierten Varianz im Falle von Gleichung (83) $\text{COV}_{\mathbb{P}}(m_{t,T}, \mathcal{V}_{t,T} | \mathcal{F}_t) = 0$ beziehungsweise im Falle von Gleichung (84) $\text{COV}_{\mathbb{P}}\left(m_{t,T}, \frac{\mathcal{V}_{t,T}}{\text{Vol-Index}_{t,T}^2} | \mathcal{F}_t\right) = 0$, gelte.

¹⁴¹Dies deckt sich mit den Ergebnissen von CARR/WU (2008) und SCHWARTZ/TROLLE (2009).

Tabelle 25: **MINCER/ZARNOWITZ-Regression auf Basis der Varianzrisikoprämien $\widehat{VRP}_{t,T}$.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,05$. ‡ Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
b_0	-0,00	0,00	-0,00	0,00	-0,00	-0,00
SE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
b_1	0,87	0,85	0,85	0,68 ^{†‡}	0,93	0,76 [†]
SE	0,10	0,19	0,08	0,07	0,08	0,10
R^2	0,55	0,28	0,59	0,48	0,64	0,52
Subperiode II						
b_0	0,01	0,02 ^{**}	0,01	0,01	0,01	0,00
SE	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
b_1	0,80	0,67	0,86	0,73 [†]	0,75 [†]	0,95
SE	0,12	0,18	0,11	0,11	0,10	0,16
R^2	0,37	0,20	0,36	0,35	0,42	0,49
Gesamtzeitraum						
b_0	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	-0,01
SE	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01
b_1	0,83 [†]	0,74	0,86	0,72 ^{†‡}	0,84 [†]	0,94
SE	0,08	0,15	0,07	0,08	0,04	0,14
R^2	0,44	0,24	0,44	0,39	0,53	0,50

6.4.5 Erklärung von CDS-Prämien mit Hilfe von Varianzrisikoprämien

Die Höhe der Prämie eines Credit Default Swaps kann als eine (implizite) Einschätzung des Marktes bezüglich der zukünftigen Kreditwürdigkeit des dem Swap zugrunde liegenden Schuldners verstanden werden. Das sogenannte „Kreditrisikopuzzle“ bezieht sich auf die Beobachtung, dass die Prämien von Credit Default Swaps deutlich höher sind als historische Ausfallraten dies implizieren. Als eine mögliche Lösung dieses Puzzles wird die in den Prämien enthaltene systematische Risikokomponente vorgeschlagen.¹⁴² Geht man nun davon aus, dass Varianzrisikoprämien auch die in Aktien- und Anleiherenditen sowie Credit Spreads eingepreiste Unsicherheit hinsichtlich zukünftiger makroökonomischer Entwicklungen enthalten,¹⁴³ scheint es angebracht, der Frage nachzugehen, ob Varianzrisikoprämien damit möglicherweise auch in der Lage sind, einen Teil des „Kreditrisikopuzzles“ zu erklären. COLLIN-

¹⁴²Vgl. LANGOHR/LANGOHR (2009), S. 317.

¹⁴³Vgl. ZHOU (2009).

Tabelle 26: **MINCER/ZARNOWITZ-Regression auf Basis der Varianzrisikoprämien $\widehat{LVRP}_{t,T}$.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$. † Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,05$. †† Signifikant verschieden von Eins zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
Subperiode I						
b_0	-0,13	-0,63	-0,12	-0,37	-0,06	-0,20
SE	0,18	0,36	0,18	0,19	0,14	0,23
b_1	1,12 [†]	0,97	1,06	1,05	1,09	1,09
SE	0,06	0,10	0,06	0,05	0,05	0,06
R^2	0,71	0,44	0,70	0,70	0,72	0,68
Subperiode II						
b_0	-0,46	-0,62*	-0,36	-0,44	-0,46	-0,25
SE	0,24	0,30	0,24	0,26	0,24	0,24
b_1	0,98	0,86	0,96	0,98	0,97	1,06
SE	0,08	0,09	0,08	0,08	0,08	0,07
R^2	0,57	0,50	0,53	0,57	0,55	0,68
Gesamtzeitraum						
b_0	-0,28	-0,53*	-0,25	-0,36*	-0,21	-0,23
SE	0,15	0,23	0,15	0,16	0,13	0,17
b_1	1,06	0,96	1,02	1,04	1,04	1,07
SE	0,05	0,06	0,05	0,05	0,04	0,05
R^2	0,65	0,47	0,62	0,65	0,651	0,68

DUFRESNE et. al (2001) betrachten zahlreiche Proxies für Ausfall- und Wiedereinbringungsrisiken und kommen zu dem Ergebnis, dass diese etwa 25% der beobachteten Credit Spreads erklären können. CARR/WU (2006) zeigen, dass implizite Volatilitäten von am Geld notierenden Optionen einen sehr hohen Erklärungsgehalt hinsichtlich der CDS-Prämien ausgewählter amerikanischer Unternehmen leisten können. Eine Varianzrisikoprämie wird von den Autoren in ihrer Untersuchung jedoch nicht berücksichtigt. Hinzu kommt, dass die Untersuchungen auf Unternehmensebene und nicht bezüglich des Kreditausfallrisikos von Staaten durchgeführt wurden.

In diesem Abschnitt soll es nun darum gehen, zu überprüfen, inwiefern die in dieser Arbeit vorgestellten Schätzer der Varianzrisikoprämien und die Volatilitätsindizes selbst in der Lage sind, zur Erklärung der Prämien von Kreditausfallpapieren (Credit Default Swaps) beitragen zu können. Neben dem risikolosen Zinssatz r_f als der üblichen Erklärungsvariable werden wir sowohl den quadrierten Volatilitätsin-

Vol-Index $_{t,T}^2$ und die Varianzrisikoprämie $\widehat{VRP}_{t,T}$ mit in das Regressionsmodell aufnehmen.¹⁴⁴

$$CDS_t = b_0 + b_1 r_f + b_2 \text{Vol-Index}_{t,T}^2 + b_3 \widehat{VRP}_{t,T} + e_{t,T} \quad (85)$$

Die Resultate der restringierten und unrestringierten Regressionen sind in den Tabellen 27 und 28 dargestellt. Zunächst wurde die Regression mit dem risikolosen

Tabelle 27: **Erklärung von CDS-Prämien.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
b_0	0,54**	0,86**	0,58**	0,89**	0,42**	0,43**
SE	0,06	0,10	0,06	0,07	0,04	0,04
b_1	-9,54**	-15,80**	-10,80**	-13,63**	-7,74**	-15,79**
SE	1,42	2,52	1,59	1,93	0,95	2,17
b_2	—	—	—	—	—	—
SE						
b_3	—	—	—	—	—	—
SE						
R^2	0,34	0,45	0,50	0,42	0,49	0,43
b_0	0,12*	0,27**	0,17**	0,47**	0,14**	0,25**
SE	0,05	0,09	0,06	0,08	0,04	0,04
b_1	—	—	—	—	—	—
SE						
b_2	0,02**	0,02*	0,02*	0,01	0,01*	0,01
SE	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
b_3	—	—	—	—	—	—
SE						
R^2	0,37	0,16	0,17	0,09	0,20	0,17

Zinssatz als einzige erklärende Variable durchgeführt. Als risikolosen Zinssatz verwenden wir erneut den Euribor Einmonats-Zinssatz für die europäischen Indizes und die vierwöchige Treasury Bill Rate für den US-amerikanischen S&P 500. Der Zusammenhang zwischen dem risikolosen Zinssatz und dem CDS-Spread ist wie erwartet negativ und zudem hoch signifikant. Das Bestimmtheitsmaß weist Werte zwischen 33,83% für die Niederlande bis zu 50,10% für Frankreich auf. Ist der quadrierte Vola-

¹⁴⁴Die Ergebnisse fallen nicht grundlegend anders aus, wenn an Stelle des Schätzers $\widehat{VRP}_{t,T}$ der Schätzer $\widehat{LVRP}_{t,T}$ verwendet wird.

Tabelle 28: **Erklärung von CDS-Prämien.** * Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,05$. ** Signifikant verschieden von Null zum Niveau $\alpha = 0,01$.

	AEX	BEL	CAC	FTSE	DAX	SPX
b_0	0,29**	0,46**	0,30**	0,59**	0,22**	0,34**
SE	0,04	0,06	0,04	0,06	0,03	0,03
b_1	—	—	—	—	—	—
SE						
b_2	—	—	—	—	—	—
SE						
b_3	-0,01	-0,01*	-0,00*	-0,01**	-0,00*	-0,00*
SE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
R^2	0,12	0,07	0,02	0,12	0,05	0,05
b_0	0,35**	0,67**	0,45**	0,73**	0,34**	0,36**
SE	0,05	0,10	0,06	0,06	0,04	0,04
b_1	-9,08**	-16,49**	-11,04**	-16,81**	-8,06**	-13,75**
SE	1,01	2,17	1,38	1,42	0,80	1,71
b_2	0,02**	0,03**	0,02**	0,03**	0,01**	0,01
SE	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
b_3	-0,00	0,00	0,00	-0,00	0,00	-0,00
SE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
\bar{R}^2	0,72	0,64	0,68	0,68	0,70	0,50

tilitätsindex die einzige zu erklärende Variable, ergibt sich ein wie erwartet positiver Zusammenhang zwischen der CDS-Prämie und dem quadrierten Indexstand, mit einem in vier von sechs Fällen signifikant von Null verschiedenen Steigungsparameter. Das bedeutet, dass ein Anstieg der CDS-Prämien häufig auch mit einem Anstieg der (impliziten) Varianz einhergeht. Das R^2 liegt zwischen 8,88% und 37,06%. Bei der Regression der CDS-Prämie auf die Varianzrisikoprämie als einzige erklärende Variable ergibt sich der erwartete negative Zusammenhang. Der Steigungsparameter b_3 ist in fünf von sechs Fällen signifikant negativ. Die Varianzrisikoprämie ist in der Lage, einen Anteil der Gesamtschwankung der CDS-Prämien in Höhe von 2,82% bis 12,26% zu erklären. Dieser moderate Erklärungsbeitrag verschwindet jedoch nahezu gänzlich, nimmt man alle drei erklärenden Variablen zusammen in das Regressionsmodell auf. Ein signifikanter Einfluss der Varianzrisikoprämie auf den CDS-Spread ist nun für keines der sechs Länder länger gegeben. Der Einfluss des risikolosen Zinssatzes und der quadrierten Volatilitätsindizes bleibt im Gegensatz dazu hoch signifikant. Das R^2 kommt für die Niederlande und Deutschland jeweils

knapp über 70%, womit diese beiden Variablen zusammen in der Lage sind, einen sehr hohen Anteil der Gesamtschwankung der CDS-Prämien zu erklären.

Abschließend lässt sich somit festhalten, dass die durchschnittlichen Varianzrisikoprämien $\widehat{VRP}_{t,T}$ zwar durchaus einen moderaten Erklärungsbeitrag der CDS-Prämien leisten können, dieser jedoch unter Hinzunahme der Volatilitätsindizes gänzlich verschwindet und damit keinen zusätzlichen Nutzen erbringen kann. Diese Beobachtung scheint auf den ersten Blick durchaus überraschend, deutet im Umkehrschluss aber daraufhin, dass der in den Volatilitätsindizes selbst schon eingepreiste Teil des im Markt inhärenten Varianzrisikos für die Erklärung der CDS-Prämien bereits alle Informationen bereitstellt.

6.5 Zusammenfassung

Das Ziel dieses Kapitels bestand darin, auf der Basis von Volatilitätsindizes sechs ausgewählter Länder, die Schätzung und Charakteristika der Varianzrisikoprämien auf verschiedenen nationalen Aktienmärkten zu untersuchen. Da es sich bei dem quadrierten Volatilitätsindex um die Varianz-Swap-Rate beziehungsweise der unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} erwarteten zukünftigen Varianz handelt, stellt die durchschnittliche Differenz zwischen der ex post geschätzten Varianz und dem quadrierten Volatilitätsindex ein Maß für die durchschnittliche Varianzrisikoprämie dar.

Nachdem in Abschnitt 2 zunächst die wichtigsten theoretischen Grundlagen dargestellt wurden, ging es in Abschnitt 3 und 4, dem eigentlichen Kern der Arbeit, darum, empirisch zu überprüfen, ob auf den hier betrachteten sechs nationalen Aktienmärkten eine Varianzrisikoprämie eingepreist ist und ob diese durch ein Gleichgewichtsmodell wie das CAPM erklärt werden kann. Des Weiteren wurde der Zusammenhang zwischen den auf den Volatilitätsindizes basierenden Varianz-Swap-Renditen und den Indexrenditen untersucht. Mit Hilfe einer MINCER/ZARNOWITZ-Regression wurde untersucht, ob die Varianzrisikoprämien konstant sind oder über die Zeit variieren. Außerdem wurde der Zusammenhang von Varianzrisikoprämien und Kreditausfallrisiken (in Form von Credit Default Swap Spreads) der sechs hier betrachteten Länder betrachtet.

Es lässt sich festhalten, dass die empirisch beobachtbaren negativen Varianzrisikoprämien darauf hindeuten, dass Investoren eine geringere erwartete Rendite-

varianz als eine Kompensation für ein erhöhtes Varianzrisiko fordern. Investoren scheuen somit nicht nur die Unsicherheit über die zukünftigen Renditen sondern auch die über die Varianz der zukünftigen Renditen. Bezogen auf ein Varianz-Swap-Investment bedeutet dies, dass Investoren bereit sind, einen im Mittel negativen Ertrag in Kauf zu nehmen, um sich gegen eine erhöhte Marktvolatilität abzusichern. Die Signifikanz der negativen Varianzrisikoprämien fällt jedoch, je nachdem, ob die einfache oder die logarithmierte Differenz zwischen ex post geschätzten Varianz und dem quadrierten Volatilitätsindex betrachtet wird, unterschiedlich aus. Nur bei der Betrachtung der logarithmierten Varianzrisikoprämien ist eine statistische Signifikanz für alle sechs Länder und alle Beobachtungszeiträume gegeben. Das CAPM ist nicht in der Lage, die negativen Varianzrisikoprämien vollständig zu erklären, was darauf hindeutet, dass es noch mindestens einen weiteren, vom Marktportfolio unabhängigen, Risikofaktor geben muss, durch den die negative Varianzrisikoprämie hervorgerufen wird. Anschließend wurde der negative Zusammenhang zwischen den Varianz-Swap-Renditen und Indexrenditen dargestellt und gezeigt, dass dieser auf Basis der hier vorliegenden Daten nahezu vollständig in Phasen negativer Indexrenditen zustande kommt. Des Weiteren lässt sich sagen, dass insbesondere die logarithmierten Varianzrisikoprämien weitestgehend konstant beziehungsweise mit der logarithmierten Varianz-Swap-Rate nur gering korreliert sind. Zum Zusammenhang zwischen den Varianzrisikoprämien und den CDS-Prämien lässt sich sagen, dass die Varianzrisikoprämien für sich zwar einen moderaten Erklärungsbeitrag der CDS-Prämien leisten können, dieser jedoch unter Hinzunahme der quadrierten Volatilitätsindizes nahezu komplett verschwindet.

7 Schlussbemerkung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bestand darin, die Handelbarkeit und den Informationsgehalt von Volatilitätsindizes zu untersuchen. Nachdem in einem ersten Schritt die wichtigsten Grundlagen zu den Volatilitätsindizes und den mit ihnen eng verbundenen Volatilitätsderivaten aufgezeigt wurden, ging es darum, die Handelbarkeit der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG zu hinterfragen. Dabei galt es insbesondere das Argument der Indexbetreiber, durch den Wechsel des Berechnungsmodells Vorteile hinsichtlich der Schaffung des Handels und der Absicherung derivativer Produkte auf diesen Index geschaffen zu haben, zu überprüfen. Es wurde deutlich, dass eine Verbesserung hinsichtlich der Handelbarkeit durch die Neueinführung des VDAX-New nicht ohne weiteres gegeben ist. Das an der Eurex getätigte Handelsvolumen in Volatilitätsderivaten ist zwar nach wie vor gering, mit Blick auf die an der CBOE gehandelten Kontrakte auf den VIX und dem durchaus regen Handel in diesen Kontrakten, bleibt dennoch abzuwarten, wie sich der Markt für börsennotierte Volatilitätsderivate in Deutschland weiter entwickeln wird. Ob es in Zukunft für den Privatanleger erneut die Möglichkeit geben wird, mit Hilfe von Indexzertifikaten an der Entwicklung eines Volatilitätsindex zu partizipieren, ist eher fraglich.

Anschließend wurde untersucht, inwieweit die Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG einen Beitrag zur Prognose der zukünftigen Volatilität leisten können. Für die Schätzung der Volatilität wurden in dieser Arbeit fünf Alternativen zum klassischen Maximum-Likelihood-Schätzer verwendet. Dabei galt es insbesondere zu überprüfen, inwiefern der Informationsgehalt und die Prognosegenauigkeit der Volatilitätsindizes durch die Auswahl des Volatilitätsschätzers beeinflusst werden. Die Analyse wurde sowohl mit Tagesdaten als auch mit hochfrequenten Daten im zeitlichen Abstand von 15 Minuten durchgeführt. Trotz der unterschiedlichen Beobachtungsfrequenz fallen die Ergebnisse nicht grundlegend anders aus. Festzuhalten bleibt, dass beide Volatilitätsindizes zwar einen hohen Erklärungsbeitrag der zukünftigen Volatilität leisten können, gleichzeitig aber eine verzerrte Prognose der zukünftigen Volatilität liefern. Für weitere Forschungsaktivitäten bietet es sich an, bei der Verwendung von hochfrequenten Daten auf speziell für diese Datenfrequenzen entwickelte Schätzer zurückzugreifen, da es in der Litera-

tur mittlerweile eine ganze Reihe alternativer Ansätze zu der realisierten Volatilität gibt.

Im letzten Teil der Arbeit ging es darum, auf der Basis nationaler Volatilitätsindizes sechs ausgewählter Länder das Vorliegen und die Charakteristika von Varianzrisikoprämien auf verschiedenen Aktienmärkten zu untersuchen. Da es sich bei dem quadrierten Volatilitätsindex um die Varianz-Swap-Rate beziehungsweise der unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} erwarteten zukünftigen Varianz handelt, stellt die durchschnittliche Differenz zwischen der ex post geschätzten Varianz und dem quadrierten Volatilitätsindex ein Maß für die durchschnittliche Varianzrisikoprämie dar. Es lässt sich festhalten, dass auf den in dieser Arbeit betrachteten Aktienmärkten negative Varianzrisikoprämien vorliegen und diese durch ein klassisches Gleichgewichtsmodell wie das CAPM nicht vollständig erklärt werden können. Das heißt, dass es noch mindestens einen weiteren, vom Marktportfolio unabhängigen, Risikofaktor geben muss, durch den die negative Varianzrisikoprämie hervorgerufen wird. Im Hinblick auf weitere Forschungsbemühungen bietet es sich demnach sicherlich an, diesen Risikofaktor, etwa mit Hilfe makroökonomischer Daten, ausfindig zu machen. Ferner wurde untersucht, ob Varianzrisikoprämien einen Informationsgehalt hinsichtlich der Erklärung von Kreditausfallrisiken (in Form von CDS-Prämien) leisten können. Die Motivation hierfür war die Hypothese, dass Varianzrisikoprämien auch die in Aktien- und Anleiherenditen sowie Credit Spreads eingepreiste Unsicherheit hinsichtlich zukünftiger makroökonomischer Entwicklungen enthalten. Es lässt sich festhalten, dass auf die in dieser Arbeit betrachteten Varianzrisikoprämien keinen besonders guten Erklärungsgehalt der CDS-Prämien leisten können. Bezüglich der Datenstruktur wäre es interessant, hochfrequente Daten für die Schätzung der ex post geschätzten Varianz heranzuziehen. Ein weiterer interessanter Punkt wäre zudem, weitere Restlaufzeiten mit in die Untersuchung aufzunehmen. Da die Volatilitätsindizes stets die erwartete zukünftige Varianz der kommenden 30 Tage unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} darstellen, könnte mit Hilfe synthetischer Varianz-Swap-Rates, die unterschiedliche Laufzeiten abdecken, eine Laufzeitstruktur von Varianzrisikoprämien abgebildet werden.

Anhang

A Beweis zu Proposition 3.1

Beweis:¹⁴⁵ Sei $f : \mathbb{R}_+^0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion, dann lässt sich zeigen, dass für ein $x_0 \in \mathbb{R}_+^0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(y) dy \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^x \left(f'(x_0) + \int_{x_0}^y f''(k) dk \right) dy \\ &= f(x_0) + 1_{\{x \geq x_0\}} \int_{x_0}^x \left(f'(x_0) + \int_{x_0}^y f''(k) dk \right) dy \\ &\quad + 1_{\{x < x_0\}} \int_x^{x_0} \left(f'(x_0) + \int_y^{x_0} f''(k) dk \right) dy . \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Satzes von FUBINI ergibt sich dann

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \\ &\quad + 1_{\{x \geq x_0\}} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^y f''(k) dk dy + 1_{\{x < x_0\}} \int_x^{x_0} \int_y^{x_0} f''(k) dk dy \\ &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \\ &\quad + 1_{\{x \geq x_0\}} \int_{x_0}^x f''(k) \int_k^x dk dy + 1_{\{x < x_0\}} \int_x^{x_0} f''(k) \int_x^k dk dy . \end{aligned}$$

Integration über y führt dann auf das gewünschte Resultat

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \\ &\quad + 1_{\{x \geq x_0\}} \int_{x_0}^x f''(k)(x - k) dk + 1_{\{x < x_0\}} \int_x^{x_0} f''(k)(k - x) dk \\ &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \\ &\quad + \int_{x_0}^{\infty} f''(k)(x - k)^+ dk + \int_0^{x_0} f''(k)(k - x)^+ dk . \end{aligned}$$

■

¹⁴⁵Vgl. BÜHLER (2006), S. 131 ff.

Literatur

- [1] ALLEN, P./EINCHCHOMB, S./GRANGER, N. (2006): Variance Swaps, JPMorgan Equity Derivatives Strategy, London.
- [2] ANDERSEN, T. G./BOLLERSLEV, T./DIEBOLD, F. X/LABYS, P. (1999): (Understanding, Optimizing, Using and Forecasting) Realized Volatility and Correlation, Manuskript, Northwestern University, Duke University and University of Pennsylvania.
- [3] ANDERSEN, T. G./FREDERIKSEN, P./STAAL, A. D (2007): The information content of realized volatility forecasts, Working Paper, Northwestern University.
- [4] BAKAERT, G./WU, G. (2000): Asymmetric volatility and risk in equity markets, in: The Review of Financial Studies, Vol 13, S. 1-42.
- [5] BAKSHI, G./KAPADIA, N. (2003a): Delta-Hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium, in: The Review of Financial Studies, Vol 16, S. 527-566.
- [6] BAKSHI, G./KAPADIA, N. (2003b): Volatility Risk Premium Embedded in Individual Equity Options: Some New Insights, in: The Journal of Derivatives, Vol 11, S. 45-54.
- [7] BARNDORFF-NIELSEN, O.E./SHEPARD, N. (2002): Estimating quadratic variation using realized variance, Working Paper, Centre for Analytical Finance, University of Aarhus, Aarhus School of Business.
- [8] BECKERS, S. (1981): Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability, in: Journal of Banking and Finance, Vol. 5, S. 363-381.
- [9] BLACK, F./SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: The Journal of Political Economy, Vol. 81, S. 637-654.
- [10] BLACK, F. (1976): The Pricing of Commodity Contracts, in: Journal of Financial Economics, Vol. 3, S. 167-179.

-
- [11] BLUHM, H./YU, J. (2001): Forecasting Volatility: Evidence from the German Stock Market, Working Paper, University of Auckland.
 - [12] BOLLERSLEV, T./TAUCHEN, G./ZHOU, H. (2008): Expected Stock Returns and Variance Risk Premia, Working Paper, Duke University, Federal Reserve Board, Washington, D.C.
 - [13] BONDARENKO, O. (2007): Variance Trading and Market Price of Variance Risk, Working Paper, University of Illinois at Chicago.
 - [14] BOSSU, S./GUICHARD, R./STRASSER, E. (2005): Just what you need to know about Volatility Swaps, JPMorgan Equity Derivatives, London.
 - [15] BRENNER, M./GALAI, D. (1989): New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility, in: Financial Analysts Journal, Vol. 45, S. 61-65.
 - [16] BRENNER, M./SUBRAHMANYAM, M. (1988): A simple formula to compute the implied standard deviation, in: Financial Analysts Journal, Vol. 44, S. 80-83.
 - [17] BRITTEN-JONES, M./NEUBERGER A. (2000): Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility, in: The Journal of Finance, Vol 55, S. 839-866.
 - [18] BROCKHAUS, O./FARKAS, M./FERRARIS, A./LONG, D./OVERHAUS, M. (1999): Equity Derivatives and Market Risk Models. Risk Books.
 - [19] BÜHLER, H. (2006): Volatility Markets: Consistent modeling, hedging and practical implementation, PhD thesis TU Berlin.
 - [20] CANINA, L./FIGLEWSKI, S. (1993): The Information Content of Implied Volatility, in: Review of Financial Studies, Vol. 6, S. 659-681.
 - [21] CARR, P./MADAN, D. (1998): Towards a Theory of Volatility Trading, in: JARROW, R. (eds): Risk Book on Volatility, Risk, New York.
 - [22] CARR, P./WU, L. (2004): Variance Risk Premia, Working Paper, New York.
 - [23] CARR, P./LEE, R. (2005): Robust Replication of Volatility Derivatives, Working Paper, Bloomberg LP/University of Chicago, New York, Chicago.

-
- [24] CARR, P./WU, L. (2006a): A Tale of Two Indices, in: The Journal of Derivatives, Vol. 13, S. 13-29.
 - [25] CARR, P./WU, L. (2006b): Stock Options and Credit Default Swaps: A Joint Framework for Valuation and Estimation, Working Paper, New York University, Baruch College, New York.
 - [26] CARR, P., LEE, R. (2007): Realized Volatility and Variance: Options via Swaps, Working Paper, Bloomberg LP/University of Chicago, New York, Chicago.
 - [27] CARR, P./WU, L. (2009a): Variance Risk Premiums, in: The Review of Financial Studies, Vol. 22, S. 1311-1341.
 - [28] CARR, P./LEE, R. (2009b): Volatility Derivatives, in: Annual Review of Financial Economics, Vol. 1, S. 1-21.
 - [29] CARR, P./LEE, R. (2009c): Robust Replication of Volatility Derivatives, Working Paper, Bloomberg LP/University of Chicago, New York, Chicago.
 - [30] CBOE (2003): VIX: CBOE Volatility Index, Chicago.
 - [31] CHIRAS, D., MANASTER, S. (1978): The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency, in: Journal of Financial Economics, Vol. 6, S. 213-234.
 - [32] CHRISS, N./MOROKOFF, W. (1999): Market Risk for Volatility and Variance Swaps, Goldman Sachs & Co.
 - [33] CLAESSEN, H./MITTNIK, S. (2002): Forecasting Stock Market Volatility and the Informational Efficiency of the DAX-index Options Market, Working Paper, Center for Financial Studies, Frankfurt am Main.
 - [34] COLLIN-DUFRESNE, P./GOLDSTEIN, R./MARTIN, S. (2001): The Determinants of Credit Spreads, in: The Journal of Finance, Vol. 56, 2177-2207.
 - [35] COX, J.C./RUBINSTEIN, M. (1985): Option Markets, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

-
- [36] DAY, T.E./LEWIS, C.M. (1988): The Behavior of the Volatility Implicit in Option Prices, in: Journal of Financial Economics, Vol. 22, S. 103-122.
- [37] DEMETERFI, K./DERMAN, E./KAMAL, M./ZOU, J.Z. (1999): More than you ever wanted to know about Volatility Swaps, Goldman Sachs & Co.
- [38] DEUTSCHE BÖRSE (2007): Leitfaden zu den Volatilitätsindizes der Deutschen Börse, Deutsche Börse AG, Frankfurt A. Main, Version 2.4.
- [39] EGLOFF, D./LEIPPOLD, M./WU, L. (2006): Variance Risk Dynamics, Variance Risk Premia, and Optimal Variance Swap Investments, Working Paper, Zurich Cantonalbank, Imperial College, and Baruch College.
- [40] FEINSTEIN, S.P. (1989): The Black-Scholes formula is nearly linear in sigma for at-the-money options: Therefore implied volatilities from at-the-money options are virtually unbiased, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- [41] FIGLEWSKI, S. (2004): Forecasting Volatility, New York University Stern School of Business, New York.
- [42] FLEMING, J. (1998): The Quality of Market Volatility Forecast Implied by S&P 500 Index Option Prices, in: Journal of Empirical Finance, Vol. 5, S. 317-345.
- [43] FRITZ, P./GATHERAL, J. (2004): Valuation of volatility derivatives as an inverse problem, Working Paper, Courant Institute and Merrill Lynch, New York.
- [44] GALAI, D. (1979): A Proposal for Indexes for Traded Call Options, in: The Journal of Finance, Vol. 34, S. 1157-1172.
- [45] GARMAN, M.B./KLASS, M.J. (1980): On the Estimation of Security Price Volatility from Historical Data, in: The Journal of Business, Vol. 53, S. 67-78.
- [46] GASTINEAU, G.L. (1977): An Index of Listed Option Premiums, in: Financial Analysts Journal, Vol. 33, S. 70-75.
- [47] GIRSANOV, I.V. (1960): On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theory of Probability and its Applications, Vol. 5, S. 285-301.

-
- [48] GOLDMAN SACHS (2007a): Der Crash, der die Optionsbewertung veränderte, Goldman Sachs International, KnowHow Akademie, Frankfurt a. Main.
- [49] GOLDMAN SACHS (2007b): Volatilitäts-Kompass, Goldman Sachs International, Die Kompass-Serie, Frankfurt a. Main. 3. Auflage.
- [50] GREENE, W.H. (2003): Econometric Analysis, Fifth Edition, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- [51] HAFNER, R./WALLMEIER, M. (2006): Volatility as an Asset Class: European Evidence, Working Paper, risklab germany GmbH, University of Fribourg.
- [52] HANSEN, P./LUNDE, A. (2005): A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-Frequency-Data, in: Journal of Financial Econometrics, Vol. 3, S. 525-554.
- [53] HANSEN, P./LUNDE, A. (2006): Consistent ranking of volatility models, in: Journal of Econometrics, Vol. 131, S. 97-121.
- [54] HARRISON, J.M./KREPS, D.M. (1979): Martingales and Arbitrage in Multi-period Securities Markets, in: Journal of Economic Theory, Vol. 20, S. 381-408.
- [55] HAUGEN, R./TALMOR, E./TOROUS, W. (1991): The effect of volatility changes on the level of stock prices and subsequent expected returns, in: The Journal of Finance, Vol. 46, S. 985-1007.
- [56] HULL, J. C. (2008): Options, Futures, and other Derivatives, Seventh Edition, Prentice Hall, London, Sydney, Toronto.
- [57] HULL, J.C./WHITE, A. (1987): The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, in: The Journal of Finance, Vol. 42, S. 281-300.
- [58] INTERNATIONAL SWAPS&DERIVATIVES ASSOCIATION INC., ISDA (2007): European Variance Swap Master Confirmation Agreement. <http://www.isda.org>
- [59] JENSEN, J.L.W.V. (1906): Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica, Vol. 30, S. 175-193.

-
- [60] JIANG, G.J./TIAN, Y.S. (2007): Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index, in: *The Journal of Derivatives*, Vol. 14, S. 35-60.
- [61] JORION, P. (1995): Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market, in: *The Journal of Finance*, Vol. 50, S. 507-528.
- [62] KRÜGEL, S. (2007): *Moment Swaps*, Bankakademie-Verlag GmbH, Frankfurt School of Finance & Management, Frankfurt a. Main, Erste Auflage.
- [63] LANGOHR, H./LANGOHR, P. (2009): *The Rating Agencies and Their Credit Ratings: What They Are, How They Work, and Why They are Relevant*, 1. Auflage, John Wiley & Sons.
- [64] LATANÉ, H.A./RENDLEMAN, R.J. (1976): Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices, in: *The Journal of Finance*, Vol. 31, S. 369-381.
- [65] LUU, J.C./MARTENS, M. (2003): Testing the mixture-of-distributions hypothesis using realized volatility, in: *Journal of Futures Marktes*, Vol. 7, S. 661-679.
- [66] LYONS, L. (2005): *Volatility and its Measurement: The Design of a Volatility Index and the Execution of its Historical Time Series at the Deutsche Börse AG*, Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt.
- [67] MARKOWITZ, H. (1952): Portfolio Selection, in: *The Journal of Finance*, Vol. 7, S. 77-91.
- [68] MCALEER, M./MEDEIROS, M. (2008): Realized Volatility: A Review, in: *Econometric Reviews*, Vol. 27, S. 10-45.
- [69] MERTON, R.C. (1973): Theory of Rational Option Pricing, in: *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, S. 141-183.
- [70] MINCER, J./ZARNOWITZ, V. (1969): The Evaluation of Economic Forecasts, in: *Economic Forecasts and Expectations*, Editor J. Mincer, National Bureau of Economic Research.
- [71] MUSIELA, M./RUTKOWSKI, M. (2007): *Martingale Methods in Financial Modelling*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

-
- [72] NEFTCI, S. (2000): An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press, San Diego, California, USA.
- [73] NEFTCI, S. (2004): Principles of Financial Engineering, Elsevier, Amsterdam.
- [74] NEUBERGER, A. (1990): Volatility Trading, Working Paper, London Business School.
- [75] NEWKEY, W.K./WEST, K.D. (1987): A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, in: *Econometrica*, Vol. 55, S. 703-708.
- [76] PATTON, A./SHEPPARD, K. (2007): Evaluating Volatility and Correlation Forecasts, Working Paper, University of Oxford, erschienen in: ANDERSON, T.G./DAVIS, R.A./KREISES, J.P./MIKOSCH, T. (2010): *Handbook of Financial Time Series*, Springer, Berlin.
- [77] PARKINSON, M. (1980): The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return, in: *The Journal of Business*, Vol. 53, S. 61-65.
- [78] PIGORSCH, C./PIGORSCH, U./POPOV, I. (2010): Volatility estimation based on high frequency data, in: DUAN, J.C./GENTLE, J.E./HÄRDLE, W.K. (eds): *Handbook of Computational Finance*, Springer, Berlin.
- [79] PODDIG, T./DICHTL, H./PETERSMEIER, K. (2001): *Statistik, Ökonometrie, Optimierung, Methoden und ihre praktischen Anwendungen in Finanzanalyse und Portfoliomanagement*, 2. Aufl., Uhlenbruch Verlag GmbH, Bad Soden.
- [80] POON, S./GRANGER, C. (2000): Forecasting Volatility in Financial: A Review, in: *Journal of Economic Literature*, Vol. 41, S. 478-539.
- [81] POTESHMAN, A. (2000): Forecasting future volatility from option prices. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [82] ROGERS, L.C.G./SACHELL, S.E. (1991): Estimating Variance From High, Low and Closing Prices, in: *The Annals of Applied Probability*, Vol. 1, S. 504-512.

-
- [83] ROGERS, L.C.G./SATCHELL, S.E./YOON, Y. (1994): Estimating the volatility of stock prices: a comparison of methods that use high and low prices, in: *Applied Financial Economics*, Vol. 4, S. 241-247.
- [84] SCHMIDT, U., THOMAS, M. (2006): Investieren in Volatilität. VDAX-Zertifikate - Zertifikate auf den VDAX? in: *Wirtschaftswissenschaftliches Studium*, Nr. 9, S. 510-514.
- [85] SCHMIDT, U., THOMAS, M. (2006): Volatilitätsindizes im Vergleich - Ist Volatilität handelbar? in: *FINANZ BETRIEB*, Heft 6, Seite 431-440.
- [86] SCHWARTZ, E./TROLLE, A. (2008): Variance Risk Premia in Energy Commodities, Working Paper, Copenhagen Business School, UCLA Anderson School of Management and NBER.
- [87] SCHÖNE, A. (2009): Zur Handelbarkeit der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Jg. 61/Dezember 2009, S. 881-910.
- [88] SCHÖNE, A. (2010): Zum Informationsgehalt der Volatilitätsindizes VDAX und VDAX-New der Deutsche Börse AG, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Jg. 62/September 2010, S. 625-661.
- [89] SINCLAIR, E. (2008): *Volatility Trading*, Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey.
- [90] THOMAS, M. (2008): *Die Volatilität der Finanzmärkte. Konzepte und Umsetzungsmöglichkeiten im Portfolio- Management*, Dissertationsschrift Universität Hannover, Verlag Dr. Kovač.
- [91] WOOLDRIDGE, J. (2002): *Econometric analysis of cross section and panel data*, Massachusetts Institute of Technology, B & T.
- [92] WÖSTER, C. (2004): *Die Bewertung von Convertible und Exchangeable Bonds bei stochastischer Zinsentwicklung*, Dissertation Universität Bielefeld. Deutscher Universitäts-Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2004.

-
- [93] YANG, D./ZHANG, Q. (2000): Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices, in: *The Journal of Business*, Vol. 73, S. 477-491.
- [94] ZHOU, H. (2010): Variance Risk Premia, Asset Predictability Puzzles, and Macroeconomic Uncertainty, Working Paper, Federal Reserve Board,